

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

FELIPE DE MELO SANTOS

**FLUIDOS IDEAIS EM RELATIVIDADE GERAL E
COSMOLOGIA**

**VITÓRIA
2016**

FELIPE DE MELO SANTOS

FLUIDOS IDEAIS EM RELATIVIDADE GERAL E COSMOLOGIA

COMISSÃO EXAMINADORA:

Prof. Dr. Davi Cabral Rodrigues (Orientador).
Universidade Federal do Espírito Santo

Prof. Dr. Júlio César Fabris (Coorientador).
Universidade Federal do Espírito Santo

Prof. Dr. Felipe Tovar Falciano.
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Prof. Dr. Winfried Ernst Wilhelm Zimdahl.
Universidade Federal do Espírito Santo

Prof. Dr. Oliver Fabio Piattella.
Universidade Federal do Espírito Santo

VITÓRIA
2016

**FLUIDOS IDEAIS EM RELATIVIDADE GERAL E
COSMOLOGIA**

FELIPE DE MELO SANTOS

**FLUIDOS IDEAIS EM RELATIVIDADE GERAL E
COSMOLOGIA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física, na área de concentração de Física Teórica

ORIENTADOR: PROF. DR. DAVI CABRAL RODRIGUES
COORIENTADOR: PROF. DR. JÚLIO CÉSAR FABRIS

Vitória
31 de março de 2016

de Melo Santos, Felipe

D1234p FLUIDOS IDEAIS EM RELATIVIDADE GERAL E
COSMOLOGIA / Felipe de Melo Santos. — Vitória, 2016
xii, 60 f. : il. ; 29cm

Dissertação (mestrado) — Universidade Federal do
Espírito Santo

Orientador: Prof. Dr. Davi Cabral Rodrigues

1. — Dissertações. 2. — Dissertações. I. Orientador.
II. Título.

CDU 000.0*00.00



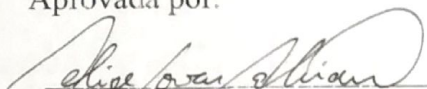
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA


“Fluidos Ideais em Relatividade Geral e Cosmologia”

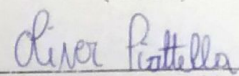
Felipe de Melo Santos

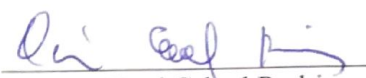
Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.

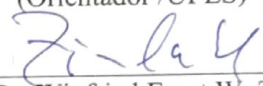
Aprovada por:


Prof. Dr. Felipe Iovar Falciano
(CBPF)


Prof. Dr. Júlio César Fabris
(UFES)


Prof. Dr. Oliver Fabio Piattella
(UFES)


Prof. Dr. Davi Cabral Rodrigues
(Orientador /UFES)


Prof. Dr. Winfried Ernst W. Zimdahl
(UFES)

Vitória-ES, 31 de março de 2016.

Dedicado aos meus pais.

Agradecimentos

À Deus, onipotente, onipresente e onisciente, em minha vida.

Aos meus pais, Raimunda Nonata e Reinaldo Santos, por seus exemplos de carinho, atenção, ajuda e acima de tudo por seu amor incondicional.

Aos meus irmãos, Tiago Santos e Jaime Neto, pelo amor e pelos conselhos nessa jornada.

Às minhas cunhadas, Karla Renata e Dielle Petri e aos meus sobrinhos.

Ao Prof. Dr. Davi Cabral Rodrigues pela paciência e pela dedicada e excelente orientação neste trabalho.

Ao Prof. Dr. Júlio César Fabris pelas ideias e conselhos dados na coorientação.

Aos professores da Pós Graduação em Física da UFES, Antônio Brasil Batista, José Alexandre Nogueira, Winfried Ernst Wilhelm Zimdahl e Oliver Fabio Piattella.

À minha amiga, irmã, Tays Miranda, pela paciência, pelos conselhos, pelo companheirismo e pelo amor.

À família Miranda.

Aos irmãos Bruno Rodrigues e Márcio Sousa.

Aos meus amigos e colegas de Vitória: Denis C. Rodrigues, Pedro Otavio, Carla R. Almeida, Gabriela Guerra, Mariniel Galvão, Igor Badke, Michael F. Gusson, Eddy Chirinos, Álefe Freire, Cássio Cecato Favarato, Fernando Pansini, Alan J. Romanel, Fabio Arthur, Mario Junior, Adriano Mesquita, Rafael Perez, Jefferson Moraes, Arthur Cavichini.

Ao meu amigo Glauber Tadaeisky.

Aos amigos de Belém: Leonardo Teixeira, Sarah Lopes, Ingrid Costa, Isaac Torres, Henrique.

À minha querida amiga Lívia Santos.

Ao meu amor incondicional, minha princesa, Sara Aviz, pelo amor, carinho, atenção, paciência, dedicação, companheirismo... durante todo esses anos de relacionamento e pelos que ainda virão.

À minha sogra, meu sogro e meu cunhado.

Ao secretario da Pós J. Carlos Coutinho.

A todos que não foram citados aqui mais que contribuíram de forma direta ou indireta, para este trabalho.

Finalmente, também agradeço à CAPES pela bolsa de estudo.

“Dust in the wind, all we are is dust in the wind.”

(Kansas)

Resumo

O conteúdo material que permeia o universo é comumente descrito por modelos de fluidos ideais. Uma revisão sobre a dinâmica destes fluidos é feita neste trabalho e uma formulação para a ação de fluido ideal é estudada. Mostra-se que modelos de campo escalar minimamente acoplado, como o campo escalar canônico e o campo tipo K-essência, mimetizam fluidos ideais. É feita a definição de campos não usuais, chamados fantasmas e táquions. Por fim, teoria de sistemas dinâmicos é usada para analisar a evolução desses fluidos num fundo cosmológico.

Palavras-chave: Fluidos, Campos Escalares, Relatividade Geral, Cosmologia, Sistemas Dinâmicos.

Abstract

The matter content that permeates the universe is usually described by ideal fluids. Fluid dynamics is here reviewed, and an action for general ideal fluids is studied. It is shown that models of scalar fields minimally coupled, as the canonical scalar field and K-essence field, can mimic certain types of ideal fluids. The definitions of certain unusual fields, called ghosts and tachyons, are presented as part of the analysis of K-essence. At last, dynamical system theory is used to study these fluids on a cosmological background.

Keywords: Fluid, Scalar Field, General Relativity, Cosmology, Dynamical Systems.

Lista de Figuras

| | | |
|-----|---|----|
| 6.1 | Diagrama do Espaço de Fase do modelo cosmológico com matéria tipo poeira, radiação e constante cosmológica. | 39 |
| 6.2 | Diagrama de espaço de fase para o caso $-\frac{1}{3} < \omega < 1$. Nesta região as soluções do tipo fluido ideal são não inflacionárias. | 44 |
| 6.3 | Diagrama de espaço de fase para o caso $-1 < \omega < -\frac{1}{3}$. Nesta região as soluções do tipo fluido ideal são inflacionárias. | 45 |
| 6.4 | Diagrama para $\omega = -1$. O eixo de $u = 0$ torna-se singular e as soluções correspondentes são do tipo de Sitter com diferentes valores do fator de Hubble. | 45 |
| 6.5 | Diagrama de fase para $n = 2$ ($\omega = \frac{1}{3}$). As funções em laranja e vermelho representam equação de vínculo (6.46). | 48 |
| 6.6 | Diagrama de um fluido ideal com $\omega = \frac{1}{3}$. As funções em vermelho e laranja representam a equação de vínculo do sistema, primeira equação de Friedmann. | 49 |

Sumário

| | |
|---|-------------|
| Agradecimentos | vi |
| Resumo | viii |
| Abstract | ix |
| Lista de Figuras | x |
| 1 Introdução | 1 |
| 2 Revisão de Fluidos Ideais | 4 |
| 2.1 Dinâmica Não Relativística de Fluidos Ideais | 4 |
| 2.2 Dinâmica Relativística de Fluidos Ideais | 8 |
| 2.2.1 Equações da Dinâmica Relativística de Fluidos Ideais na Ausência de Campo Gravitacional | 10 |
| 2.2.2 Equações da Dinâmica Relativística de Fluidos Ideais para uma Métrica Genérica | 12 |
| 2.3 Velocidade de Propagação de Perturbações num Fluido Ideal | 14 |
| 2.4 Equação de Estado | 14 |
| 3 Ação Geral do Fluido Ideal | 16 |
| 3.1 Introduzindo a Ação do Fluido Ideal | 16 |
| 3.2 Fluxo Rotacional Isentrópico | 19 |
| 3.3 Movimentos Generalizados do Fluido | 21 |
| 4 Modelo de Campo Escalar Canônico | 23 |
| 4.1 Correspondência entre os Modelos de Campo Escalar Minimamente Acoplado e Fluido Ideal | 23 |
| 4.2 Representações sobre a Dinâmica de Fluido Não Usual | 27 |
| 5 Modelo de Campo Escalar tipo K-essência | 30 |
| 5.1 Correspondência entre Modelo de Campo Escalar tipo K-essência e Fluido Ideal | 30 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 5.2 | Caso Particular $f(\phi, X) = \alpha X^n$ | 32 |
| 6 | Análise Qualitativa de Modelos Cosmológicos | 35 |
| 6.1 | Modelo Cosmológico com Matéria, Radiação e Constante Cosmológica | 35 |
| 6.2 | Modelo Cosmológico com Campo Escalar Canônico mais Potencial | 39 |
| 6.3 | Modelo Cosmológico com Campo Escalar tipo K-essência | 46 |
| 7 | Conclusão | 50 |
| | Apêndice A Método da Esfera de Poincaré | 53 |
| | Referências Bibliográficas | 56 |

Capítulo 1

Introdução

A cosmologia consiste no estudo do universo como um todo e de sua composição. Ela é uma tentativa de explicar os detalhes da evolução, dos primórdios até a atual configuração. No caso do atual Modelo Padrão Cosmológico¹ (Λ CDM) há questões ainda não resolvidas, entre eles estão o paradigma inflacionário, e a origem da matéria e energia escuras. A inflação, proposta inicialmente por Alan H. Guth [4], afirma que o universo deve ter passado por um período de expansão acelerada, seu objetivo é resolver questões relacionadas ao universo primordial, como os problemas do horizonte, planura, entropia e outros. A matéria escura é uma forma postulada de matéria que não interage com a matéria comum, nem consigo mesma (ou é fracamente interagente), ela compõe 25% do conteúdo energético do universo. Por aparentemente interagir somente gravitacionalmente, sua presença é atualmente exclusivamente inferida a partir de efeitos sobre a matéria visível, como estrelas, galáxias e aglomerados de galáxias. A energia escura, uma forma exótica de energia que possui pressão negativa, é uma das formas atribuídas para explicar o atual cenário de expansão acelerada do universo [5].

Em cosmologia, o conteúdo material do universo é comumente modelado por fluidos ideais. A dinâmica de fluidos ideais, que é parte da hidrodinâmica, é uma teoria há muito estudada [6]. A hidrodinâmica é um quadro extremamente bem sucedido para descrever a dinâmica da matéria nas maiores medidas do universo [7]. A importância de se estudá-la está ligada à análise do estado de movimento do fluido. Isto dependerá da forma que o fluido se encontra, ou seja, se ele possui movimento relativístico ou não relativístico, ou ainda, se há ou não interação gravitacional sobre o sistema. Além disso, neste contexto é considerado que o fluido que permeia o universo é caracterizado por uma equação de estado de fluido barotrópico [7], $p = p(\mathcal{E})$, especificamente por $p = \omega\mathcal{E}$, sendo p e \mathcal{E} , respectivamente, a pressão e a densidade de energia do fluido, e $\omega \in [-1, 1]$.

A expansão acelerada do universo observada atualmente faz com que se busque explicações para suas evidências [8–11]. Para manter a Teoria da Relatividade Geral [12, 13] intacta, necessita-se de um tipo de fluido que exerça o efeito de aceleração observado. Neste

¹Para uma descrição detalhada do Modelo Padrão Cosmológico ver [1–3]

contexto, verifica-se que a condição de energia² forte, $\mathcal{E} + 3p \geq 0$, deva ser violada, pois isto implica que a equação de estado do fluido obedeça a condição $\frac{p}{\mathcal{E}} \leq -\frac{1}{3}$, ou seja, as pressões no fluido se tornam negativas ao ponto de superar a contribuição de energia. Existem ainda fortes evidências de que os dados observacionais favoreçam valores para $\omega < -1$ [17] de tal forma que a condição de energia nula $\mathcal{E} + p \geq 0$ (condição de positividade da densidade de energia) seja também violada. Se isto de fato ocorrer, a densidade de energia do fluido deverá crescer a medida em que o universo se expande, conduzindo-o a uma possível singularidade no futuro, *Big Rip* [17–19]. Observa-se também que existem muitos indícios de uma violação da condição de energia dominante $\mathcal{E} \geq |p|$, de modo que, diversos trabalhos dedicam-se a essa questão [20].

Da literatura [21, 22] sabe-se que existem modelos de campo escalar que efetivamente se comportam como fluidos ideais. Campos escalares fornecem modelos particulares de fluidos, com precisas consequências fenomenológicas, e estão em maior proximidade de uma teoria fundamental [23].

Um método bem adequado para estudar muitos aspectos de cosmologia são sistemas dinâmicos. Em geral, a teoria de sistemas dinâmicos é usada para estudar sistemas físicos que evoluem no tempo. Para se ter uma ideia sobre o que consiste o método, supõe-se que o estado do sistema físico em um instante de tempo pode ser descrito por um determinado elemento de um espaço de estado (espaço de fase), de dimensão finita ou infinita. A evolução do sistema é descrito por uma equação diferencial autônoma que tem simbolicamente a forma $\dot{x} = f(x)$, de modo que, o ponto denota deriva com respeito a variável temporal atribuída ao sistema. Se o espaço de fase é dimensionalmente finito então esta equação diferencial representará um sistema autônomo de equações diferenciais ordinárias, enquanto que, se o espaço de fase for um espaço funcional, o mapa da função $f(x)$ envolveria derivadas espaciais e a equação diferencial representaria um sistema autônomo de equações diferenciais parciais. No contexto cosmológico, com espaço homogêneo e isotrópico, estuda-se equações diferenciais ordinárias, desta forma, o espaço de fase analisado neste contexto possui dimensão finita. O objetivo da aplicação destes métodos é obter qualitativamente informações sobre a evolução das diversas classes de modelos cosmológicos à custa de fazer suposições idealizadas sobre os processos físicos no universo. A técnica de sistemas dinâmicos e sua aplicação em cosmologia pode ser vista de forma detalhada em [24–26].

A estrutura deste trabalho tem a seguinte forma. O segundo capítulo revisa os conceitos básicos sobre mecânica, não relativística e relativística, de fluidos ideais [6, 12]. Serão obtidas as equações que descrevem o comportamento do fluido no tempo. Este comportamento é analisado em regime de baixas e altas velocidades, com e sem interação gravitacional. No capítulo três é feita uma discussão a respeito do princípio variacional para o fluido ideal [27]. O quarto capítulo descreve o modelo de campo escalar canônico minimamente acoplado. Dada as circunstâncias, verifica-se que este sistema mimetiza o modelo de fluido ideal [21, 28, 29]. Ainda, discute-se brevemente outras formas de campos escalares discutidos na literatura, o do tipo fantasma e do tipo taquiônico [30]. Outro sistema minimamente acoplado

²Estudos sobre condições de energia podem ser vistos em [13–16]

de campo escalar é descrito no capítulo cinco, o modelo de K-essência [22, 31–33]. Diferente do modelo canônico, este sistema é formado por uma função arbitrária que dependerá do termo cinético do campo escalar. As mesmas condições usadas para mimetizar o modelo de fluido ideal ao de campo escalar canônico, são utilizadas para o caso de K-essência. A princípio as equações que descrevem a dinâmica deste modelo serão obtidas com o um função arbitrária do termo cinético, em seguinte, será admitida uma forma para esta função. É feita análise por diagrama de espaço de fase, de forma a construir diagramas para cada modelo proposto e, por fim, verificar a riqueza e as semelhanças entre os gráficos obtidos. A análise final deste trabalho e suas perspectivas futuras são discutidas na conclusão.

Capítulo 2

Revisão de Fluidos Ideais

2.1 Dinâmica Não Relativística de Fluidos Ideais

O estudo do movimento dos fluidos¹ denomina-se dinâmica dos fluidos [6]. Como seus fenômenos são estudados em meios macroscópicos, um fluido pode ser tratado como meio contínuo, ou seja, pode-se sempre pressupor que qualquer elemento de volume do fluido, pequeno que seja, é suficientemente grande para conter um grande número de moléculas. Neste contexto é feita a análise do movimento de um elemento de volume do fluido, que também será denominado *partícula fluida*². No entanto, os estudos feitos no decorrer do texto são baseados em movimento de fluidos onde a condutividade térmica e a viscosidade são insignificantes. Este tipo de fluido é denominado *fluido ideal*. De modo geral, ele também é definido como localmente *isotrópico*, ou seja, dado um observador movendo-se junto ao fluido, as propriedades físicas medidas por ele serão as mesmas em qualquer direção, entretanto, isto será válido se o *caminho livre médio*³ entre as colisões no fluido forem pequenas em comparação com a escala de comprimentos utilizadas pelo observador.

A descrição que fornece o estado do fluido é dado em função do seu campo de velocidade, $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$ (determinada em um ponto fixo (x, y, z) e em um instante t) e das suas respectivas magnitudes termodinâmicas, por exemplo, a pressão $p(x, y, z, t)$ e densidade de massa $\rho(x, y, z, t)$. Uma vez que estas grandezas são determinadas o estado do fluido em movimento é completamente estabelecido.

A partir de então, podem ser obtidas as equações fundamentais da dinâmica de fluidos. A princípio, deve-se adquirir a equação que expressa a conservação de matéria, a *equação de conservação de massa*. Para isto, considera-se um certo volume V_0 do espaço, a massa do fluido contida nessa região é dada por $\int \rho dV$, de modo que, a integração é feita sobre todo volume V_0 . A massa do fluido que atravessa, por unidade de tempo, um elemento de área, da , da superfície que limita este volume é $\int \vec{v} \cdot d\vec{a}$, sendo $d\vec{a}$ tomado na direção normal a superfície e seu módulo igual a área do elemento de superfície. Desta maneira, a massa que

¹O estudo é direcionado tanto para líquidos quanto para gases.

²Um volume extremamente pequeno comparado com o volume total do corpo.

³Distância ou espaço entre duas colisões sucessivas das moléculas do fluido.

sai de V_0 , por unidade de tempo, é

$$\oint \rho \vec{v} \cdot d\vec{a}.$$

A integração é feita sobre toda superfície fechada que delimita o volume em questão. Por outro lado, a redução da massa por unidade de tempo no volume é dada por

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV.$$

Igualando estas duas equações, obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV = - \oint \rho \vec{v} \cdot d\vec{a}. \quad (2.1)$$

Mediante *Teorema de Green*, a integral de superfície se transforma em uma integral de volume, resultando

$$\int \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) \right] dV = 0. \quad (2.2)$$

Esta equação deve ser válida para qualquer elemento de volume dV , desta maneira,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (2.3)$$

sendo esta a equação de conservação de massa. O termo $\rho \vec{v}$ representa a densidade de fluxo massivo, sua direção é a mesma do movimento do fluido e sua magnitude é igual a massa que atravessa, por unidade de tempo, a unidade de área perpendicular a velocidade.

Como (2.3) fornece a conservação da massa no interior de V_0 , a dinâmica de uma quantidade do fluido que sai desse volume será representada pela *equação de Euler*. Deste modo, considera-se certo volume do fluido, a força que atuará sobre ele será igual a integral da pressão feita sobre toda superfície que limita o volume, $-\oint p d\vec{a}$. Do teorema de Green obtém-se

$$-\oint p d\vec{a} = - \int \nabla p dV. \quad (2.4)$$

Deve-se notar que o termo $-\nabla p$ é a força atuante, por unidade de volume, sobre dV . Então, a equação de movimento do elemento de volume do fluido é obtida igualando este termo ao produto da massa por unidade de volume ρ pela aceleração $\frac{d\vec{v}}{dt}$, ou seja,⁴

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p. \quad (2.5)$$

⁴Isto se refere a segunda lei de Newton, a qual diz que a força atuante em um corpo é diretamente proporcional à sua aceleração e o fator de proporcionalidade é a massa do corpo.

A derivada de \vec{v} refere-se à variação temporal da velocidade da partícula fluida quando ela se move no espaço. Sendo esta uma derivada total, tem-se

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}. \quad (2.6)$$

Substituindo esta equação em (2.5) obtém-se

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p, \quad (2.7)$$

sendo esta a equação de Euler. Se o fluido está contido no interior de um campo gravitacional \vec{g} , a força que atuará sobre qualquer elemento de volume é adicionada no segundo membro da equação (2.5). Assim, (2.7) fica

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{g}. \quad (2.8)$$

Uma característica importante de ser analisada refere-se à entropia do sistema. Dada relação de Gibbs

$$d\Psi = -sdT + Vdp, \quad (2.9)$$

sendo Ψ o potencial termodinâmico por unidade de massa⁵ e $V = \frac{1}{\rho}$ o volume específico, e dada ausência da troca de calor entre as diferentes partes do fluido ideal, e também entre o meio externo, presume-se que o movimento do fluido é do tipo *adiabático*, desta forma, verifica-se que a entropia de qualquer partícula fluida permanece constante com o passar do tempo,⁶

$$\frac{ds}{dt} = 0, \quad (2.10)$$

sendo s a entropia por unidade de massa da partícula fluida. A condição do movimento adiabático também pode ser escrita como

$$\frac{\partial s}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)s = 0. \quad (2.11)$$

Esta é a equação que descreve, de modo geral, o movimento adiabático do fluido ideal. Utilizando (2.3), a equação (2.11) pode ser escrita como uma "equação de conservação" para entropia:

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho s \vec{v}) = 0, \quad (2.12)$$

o termo $\rho s \vec{v}$ representa a densidade de fluxo de entropia.

⁵Potencial de Gibbs ou entalpia livre.

⁶Para mais detalhes sobre este resultado ver [7,34,35].

A equação adiabática pode adquirir uma forma muito mais simples. Se a entropia é constante através do volume do fluido em um determinado instante inicial e segue mantendo este valor durante qualquer movimento subsequente do fluido (como muitas vezes acontece), a equação adiabática pode ser escrita simplesmente como

$$s = \text{constante} , \quad (2.13)$$

este movimento é denominado *isentrópico*.

Como dito inicialmente, a descrição que fornece o estado de um fluido é determinado pelo seu campo de velocidade, pressão e densidade de massa. Deste modo, o sistema completo que determinará a dinâmica do fluido ideal é composto pelas equações da *conservação de massa*, de *Euler* e a *adiabática*.

Agora, considera-se o caso de um fluido em repouso em um campo gravitacional uniforme. A equação de Euler toma a forma:

$$\nabla p = \rho \vec{g} , \quad (2.14)$$

sendo esta a equação que descreve o equilíbrio mecânico do fluido no campo. Se não existe nenhuma compressão, devido ação de força externa, a densidade permanece constante em todo volume. Tomando o eixo z para cima, a pressão terá dependência somente nessa componente, assim, $\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$, que, da integração, resultará

$$p = -\rho g z + \text{constante} . \quad (2.15)$$

A partir da condição de que o fluido, em repouso, está sujeito a uma pressão externa p_0 (a mesma em todos os pontos), em uma superfície livre de altura h , a *constante* em (2.15) a ser determinada é $p_0 + \rho g h$, resultando⁷

$$p = p_0 + \rho g (h - z) . \quad (2.16)$$

Supondo que o fluido não só está em equilíbrio mecânico mas também equilíbrio térmico, desta maneira, considerando (2.9) e (2.14), obtém-se

$$\nabla(\Psi + gz) = 0 ,$$

de modo que, \vec{g} está dirigido ao longo do eixo z negativo. O resultado é que em todo fluido

$$\Psi + gz = \text{constante} , \quad (2.17)$$

sendo gz a energia potencial por unidade de massa do fluido no campo gravitacional. Uma consequência simples desta situação é que, havendo equilíbrio mecânico dentro do campo, a pressão sobre o fluido poderá ser uma função somente da altura z , isto induz que a

⁷No caso de gases, como a atmosfera, não se pode pressupor que a densidade é constante.

densidade será também uma função somente de z . Desta maneira, estas duas grandezas, juntas, determinam a temperatura do sistema, ou seja, esta outra grandeza também só dependerá da altura. No entanto, se a temperatura for diferente em distintos pontos com a mesma altura, não haverá equilíbrio mecânico.

Pode-se também determinar a equação de equilíbrio para um fluido com massa muito grande, cuja estrutura é mantida por atração gravitacional.⁸ Seja ψ o potencial gravitacional⁹ criado pelo fluido que satisfaz a *equação de Poisson*

$$\nabla^2 \psi = 4\pi G \rho . \quad (2.18)$$

A aceleração gravitacional e a força sobre ρ são dadas, respectivamente, por $-\nabla\psi$ e $-\rho\nabla\psi$. Desta maneira, a condição de equilíbrio hidrostático será

$$\nabla p = -\rho \nabla \psi . \quad (2.19)$$

Tomando o divergente desta ultima equação e substituindo em (2.18), obtém-se

$$\nabla \cdot \left(\frac{\nabla p}{\rho} \right) = -4\pi G \rho . \quad (2.20)$$

Deve-se notar que esta situação se refere somente ao equilíbrio mecânico, pois a *equação de Poisson* não pressupõe a existência de um equilíbrio térmico completo.

2.2 Dinâmica Relativística de Fluidos Ideais

Estabelecer equações que descrevem a dinâmica relativística de fluidos ideais têm uma importância fundamental quando se considera que o sistema analisado possui velocidades suficientemente grandes (perto da velocidade da luz c). De [12] verifica-se que o fluido ideal é caracterizado, neste contexto relativístico, pelo *quadritensor momento-energia*, $T^{\mu\nu}$. Assim, considera-se um *frame* em repouso com relação ao fluido em determinado tempo e posição (descrito por "linha"), de maneira que, a hipótese de fluido ideal diz que $T^{\mu\nu}$ toma a forma característica de simetria esférica, ou seja, suas componentes são dadas por $T'^{ij} = p\delta^{ij}$, $T'^{ij} = T^{ij} = 0$ e $T'^{00} = \mathcal{E}$, sendo p e \mathcal{E} a pressão e a densidade de energia do fluido, respectivamente. Agora, este mesmo frame é posto em repouso com relação ao laboratório, onde estão sendo feitas as medidas, e supõe-se que o fluido esteja se movendo em relação ao frame, num determinado ponto do espaço-tempo, com velocidade \vec{v} . A conexão entre as coordenadas comóveis¹⁰ ao fluido e as do laboratório são dadas por

$$x^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta(\vec{v}) x'^\beta ,$$

⁸Este é o caso designado, por exemplo, para uma estrela.

⁹Também chamado de Potencial Gravitacional Newtoniano.

¹⁰Um observador que se move junto ao fluido.

sendo $\Lambda_{\beta}^{\alpha}(\vec{v})$ a matriz transformação, ela assume os seguintes valores ¹¹

$$\Lambda_0^0 = \left(1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \equiv \gamma, \quad (2.21a)$$

$$\Lambda_0^i = \gamma \frac{v_i}{c}, \quad (2.21b)$$

$$\Lambda_j^i = \delta_j^i + v^i v_j \frac{(\gamma - 1)}{\vec{v}^2}, \quad (2.21c)$$

$$\Lambda_j^0 = \gamma \frac{v_j}{c}. \quad (2.21d)$$

No entanto, $T^{\mu\nu}$ é um tensor, sendo que o seu valor no *frame* do laboratório será obtido em analogia com a transformação feita nas coordenadas, isto é, $T^{\mu\nu} = \Lambda_{\alpha}^{\mu}(\vec{v})\Lambda_{\beta}^{\nu}(\vec{v})T'^{\alpha\beta}$, de maneira que, suas componentes serão dadas por

$$T^{ij} = p\delta^{ij} + (p + \mathcal{E}) \frac{v^i v^j}{c^2} \gamma^2, \quad (2.22)$$

$$T^{i0} = (p + \mathcal{E}) \frac{v^i}{c} \gamma^2,$$

$$T^{00} = \gamma^2 \left(\frac{\vec{v}^2}{c^2} p + \mathcal{E} \right).$$

Estas componentes são agrupadas em uma única equação

$$T^{\mu\nu} = p\eta^{\mu\nu} + (p + \mathcal{E}) \frac{u^{\mu}u^{\nu}}{c^2}, \quad (2.23)$$

sendo $\eta^{\mu\nu}$ a métrica do espaço-tempo de Minkowski¹², ou seja, as primeiras análises foram feitas com ausência de gravitação, posteriormente os estudos serão feitos considerando uma métrica generalizada. O quadrivetor u^{μ} é definido como a quadrivelocidade do fluido, com

$$u^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\tau}, \quad (2.24)$$

sendo $d\tau$ o *tempo próprio* da partícula fluida. Tem-se também $u^{\mu} = \gamma(c, \vec{v})$, e normalização igual à

$$u^{\mu}u_{\mu} = \eta_{\mu\nu}u^{\mu}u^{\nu} = -c^2, \quad (2.25)$$

de maneira que

$$\frac{\partial}{\partial x^{\nu}} (u^{\mu}u_{\mu}) = 2u_{\mu} \frac{\partial u^{\mu}}{\partial x^{\nu}} = 0. \quad (2.26)$$

¹¹Para mais detalhes ver secção 2.1 de [12].

¹²Será considerada a seguinte assinatura $\eta^{\mu\nu} = (-1, 1, 1, 1)$, também utilizada durante todo o trabalho.

2.2.1 Equações da Dinâmica Relativística de Fluidos Ideais na Ausência de Campo Gravitacional

A expressão que fornece as equações de conservação do tensor momento-energia do sistema físico é

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0 . \quad (2.27)$$

As equações de movimento relativístico do fluido são obtidas através desta equação. No entanto, a conservação de outras quantidades, como a carga do sistema, número de átomos, etc, não está contida em (2.27). Assim, precisa-se obter um princípio de conservação destas quantidades. Para isto, é utilizada uma destas quantidades referindo-se como o *número de partículas*¹³ do volume. Sendo n a *densidade do número de partículas* em um frame que se move junto ao fluido num determinado ponto do espaço-tempo. Neste frame as componentes do quadrivetor fluxo de partículas, N^μ , são

$$N'^i = 0 \quad e \quad N'^0 = n . \quad (2.28)$$

Em qualquer outro frame, que se move com velocidade \vec{v} em relação ao fluido, o fluxo de partículas estará relacionado à (2.28) pelas seguintes transformações

$$N^i = \Lambda_\mu^i(\vec{v}) N'^\mu = n\gamma \frac{v^i}{c} , \quad (2.29)$$

$$N^0 = \Lambda_\mu^0(\vec{v}) N'^\mu = \gamma n , \quad (2.30)$$

desta maneira, nota-se que N^μ é proporcional a quadrivelocidade u^μ , ou seja,

$$N^\mu = n \frac{u^\mu}{c} . \quad (2.31)$$

De modo geral, para qualquer frame, a componente temporal fornece a densidade do número de partículas, e as três componentes espaciais formam o vetor fluxo de partículas. A divergência de N^μ fornece

$$0 = \frac{\partial N^\alpha}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (n u^\alpha) = \frac{\partial}{\partial t} (n\gamma) + \nabla \cdot (n\gamma \vec{v}) . \quad (2.32)$$

Esta é a *conservação do número de partículas*. Entretanto, se cada partícula possuir a mesma massa de repouso, a equação (2.32) fornecerá a *equação de continuidade relativística* (ou de conservação de massa)

$$0 = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\rho u^\alpha) , \quad (2.33)$$

sendo ρ é a densidade de massa de repouso do sistema.

¹³Não confundir com o conceito de partícula fluida atribuído no início do capítulo.

Pode-se obter uma extensão da conservação do tensor momento-energia através de uma projeção na direção da quadrivelocidade u_μ . Para isto, substitui-se (2.23) em (2.27) de modo a obter a seguinte equação

$$0 = \eta^{\mu\nu} \frac{\partial p}{\partial x^\nu} + \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left[(p + \mathcal{E}) \frac{u^\mu u^\nu}{c^2} \right]. \quad (2.34)$$

Ao projetar (2.34) na direção da quadrivelocidade u_μ , obtém-se

$$0 = \eta^{\mu\nu} \frac{\partial p}{\partial x^\nu} u_\mu + \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left[(p + \mathcal{E}) \frac{u^\mu u^\nu}{c^2} \right] u_\mu, \quad (2.35)$$

de maneira que, ao considerar (2.25) e (2.26), a equação (2.35) resultará na forma estendida da conservação de $T^{\mu\nu}$

$$0 = u^\nu \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x^\nu} + (p + \mathcal{E}) \frac{\partial u^\nu}{\partial x^\nu}. \quad (2.36)$$

Existe outra forma de projetar a conservação do tensor momento-energia, uma vez que esta fornecerá a forma relativística da *equação de Euler*. Este outro método projeta (2.34) no espaço tridimensional perpendicular à quadrivelocidade. Para que esta projeção espacial seja realizada contrai-se o *vetor projeção*, $h_{\mu\rho} = \eta_{\mu\rho} + \frac{u_\mu u_\rho}{c^2}$, com a equação (2.34), ou seja,

$$0 = h_{\mu\rho} u^\mu u^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} (p + \mathcal{E}) + (p + \mathcal{E}) h_{\mu\rho} u^\mu \frac{\partial u^\nu}{\partial x^\nu} + (p + \mathcal{E}) h_{\mu\rho} u^\nu \frac{\partial u^\mu}{\partial x^\nu} + c^2 h_{\mu\rho} \eta^{\mu\nu} \frac{\partial p}{\partial x^\nu},$$

que terá como resultado

$$0 = (p + \mathcal{E}) u^\nu \frac{\partial u_\rho}{\partial x^\nu} + u^\nu u_\rho \frac{\partial p}{\partial x^\nu} + c^2 \frac{\partial p}{\partial x^\rho}. \quad (2.37)$$

Esta forma relativística da equação de Euler pode ser escrita em termos da velocidade \vec{v} . Para obtê-la basta fazer $\mu = 1$ em (2.34), escrevendo $u^i = \frac{v^i}{c} u^0$, e depois usar (2.7) com $\mu = 0$. Isto resultará

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = - \frac{1}{\gamma^2 (p + \mathcal{E})} \left[c^2 \nabla p + \vec{v} \frac{\partial p}{\partial t} \right]. \quad (2.38)$$

A equação do movimento adiabático pode ser obtida substituindo (2.32) em (2.35), resultando

$$0 = -n u^\nu \left[p \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{1}{n} \right) + \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{\mathcal{E}}{n} \right) \right]. \quad (2.39)$$

Considerando a identidade termodinâmica

$$KT d\sigma = p d \left(\frac{1}{n} \right) + d \left(\frac{\mathcal{E}}{n} \right), \quad (2.40)$$

sendo $\frac{1}{n}$ o volume por partícula (volume molecular), K a constante de Boltzman¹⁴, T a temperatura e σ a entropia por partícula. Desta maneira, da última equação, (2.39) pode ser escrita como

$$0 = u^\nu \frac{\partial \sigma}{\partial x^\nu} \propto \frac{\partial \sigma}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \sigma , \quad (2.41)$$

sendo esta a equação do movimento adiabático do sistema.

Nota-se que, se tratando de um regime de baixas velocidades, a equação relativística da continuidade (ou da conservação de massa) resultará em (2.3). No caso da forma estendida de (2.27), deve-se ter um certo cuidado, pois, ao tomar este limite, a equação (2.36) poderá fornecer (2.3), no entanto, a obtenção desta equação dependerá de como é definida densidade de massa total do sistema neste limite. Esta mesma observação é válida para o caso da equação relativística de Euler ao ser colocada no mesmo regime.

Todas as relações obtidas nesta subseção determinam a dinâmica relativística do fluido no espaço-tempo de Minkowski, ou seja, na ausência de campo gravitacional. A análise feita na próxima subseção será destinada a fornecer estas equações num ambiente onde há presença de gravitação.

2.2.2 Equações da Dinâmica Relativística de Fluidos Ideais para uma Métrica Genérica

Até agora, as equações de movimento de um fluido ideal foram obtidas e analisadas no espaço-tempo de Minkowski, ou seja, sem a interação de um campo gravitacional. Na presença de um campo gravitacional o tensor momento-energia de um fluido ideal assume a forma

$$T^{\mu\nu} = p g^{\mu\nu} + (p + \mathcal{E}) \frac{u^\mu u^\nu}{c^2} , \quad (2.42)$$

sendo $g^{\mu\nu}$ a métrica da variedade curva e $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ o quadrivetor velocidade da partícula fluida. Nota-se que (2.42) e (2.23) são semelhantes, no entanto, a métrica de Minkowski é substituída por uma métrica genérica em (2.42). Esta semelhança é garantida pelo *Princípio da Equivalência*.¹⁵

A equação da conservação de $T^{\mu\nu}$ na presença de campo gravitacional é obtida simplesmente substituindo a sua derivada ordinária pela derivada definida em espaços curvos, ou seja, a derivada covariante

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0 . \quad (2.43)$$

Da mesma forma, as equações de determinaram a dinâmica relativística geral do

¹⁴Esta constante é introduzida aqui para fazer σ adimensional.

¹⁵Este princípio da Relatividade Geral diz que não é possível fazer uma distinção entre um campo gravitacional e um referencial acelerado. Em ambos os casos, deve-se observar os mesmos fenômenos físicos [12, 13].

fluido são obtidas realizando a mesma substituição de derivada.¹⁶ Assim, as equações da continuidade (2.32),¹⁷ a estendida da conservação de $T^{\mu\nu}$ (2.36), de Euler (2.37) e do movimento adiabático (2.41), são dadas, respectivamente, por

$$0 = \nabla_\alpha(\rho u^\alpha) , \quad (2.44)$$

$$0 = u^\mu \nabla_\mu \mathcal{E} + (p + \mathcal{E}) \nabla_\mu u^\mu , \quad (2.45)$$

$$0 = (p + \mathcal{E}) u^\nu \nabla_\nu u_\rho + u_\rho u^\nu \nabla_\nu p + c^2 \nabla_\rho p , \quad (2.46)$$

$$0 = u^\mu \nabla_\mu (\sigma) . \quad (2.47)$$

A normalização da quadrivelocidade (2.25) tomará a forma

$$g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -c^2 , \quad (2.48)$$

implicando em

$$\nabla_\nu (u^\mu u_\mu) = 2u_\mu \nabla_\nu u^\mu = 0 . \quad (2.49)$$

A partir destas equações é possível obter a condição de equilíbrio mecânico no fluido, como obtido no final da seção anterior. Desta maneira, notando que em equilíbrio o campo é estático, isto é, o fluido não está se movendo, (2.48) dará

$$u^0 = (-c^2 g^{00})^{-\frac{1}{2}} \quad e \quad u^i = 0 . \quad (2.50)$$

Além disso, todas as magnitudes, $g_{\mu\nu}$, p e \mathcal{E} , são independentes do tempo e as componentes mistas da métrica são nulas, $g_{0i} = g_{i0} = 0$. Assim, a partir da equação (2.46), tem-se

$$\begin{aligned} 0 &= c^2 \nabla_\gamma p + \Gamma^\mu{}_{00} (p + \mathcal{E}) (-g_{00})^{-1} g_{\mu\gamma} \\ 0 &= c^2 \nabla_\gamma p + \left[\frac{g^{\mu\gamma}}{2} \frac{\partial}{\partial x^\gamma} (-g_{00}) \right] (p + \mathcal{E}) (-g_{00})^{-1} g_{\mu\gamma} , \end{aligned}$$

que resultará em

$$-\nabla_\gamma p = (p + \mathcal{E}) \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \ln(-g_{00})^{\frac{1}{2}} , \quad (2.51)$$

Quando γ assume o valor $\gamma = 0$ é obtido um valor trivial para esta equação, no entanto, para

¹⁶É claro que ao atuar a derivada covariante em um escalar esta resulta em uma derivada ordinária.

¹⁷Definir esta equação como a conservação de massa do sistema físico acaba por ser um tanto errada, pois, sabe-se que em relatividade geral o conceito de massa não é bem definido, desta maneira, é bom que fique claro que esta equação refere-se a conservação do número de partículas do sistema.

$\gamma = i$ obtém-se, no limite de baixas velocidades, a equação não relativística do equilíbrio hidrostático (2.19), exceto que o termo $(p + \mathcal{E})$ aparece no lugar de ρ e $\ln(-g_{00})^{\frac{1}{2}}$ aparece no lugar do potencial gravitacional.

2.3 Velocidade de Propagação de Perturbações num Fluido Ideal

Uma importante análise feita em dinâmica dos fluidos é calcular a velocidade de propagação de perturbações em seu volume. Como exemplo, considera-se um fluido relativístico homogêneo e estático [12]. Para um estado imperturbável tem-se n_0 , \mathcal{E}_0 , p_0 , e σ constantes no espaço e tempo, e $\vec{v}_0 = 0$. A perturbação resulta em $n = n_0 + n_1$, $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_1$, $p = p_0 + p_1$ e $\vec{v} = \vec{v}_1$, no entanto, de acordo com (2.41), σ não sofre mudança. Por aproximação em primeira ordem as equações (2.32) e (2.38) tornam-se

$$0 = \frac{\partial n_1}{\partial t} + n \nabla \cdot \vec{v}_1, \quad (2.52)$$

$$\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\frac{c^2 \nabla p_1}{(p_0 + \mathcal{E}_0)}. \quad (2.53)$$

Mas, com $d\sigma = 0$, a identidade termodinâmica (2.40) fornece

$$-\frac{(p_0 + \mathcal{E}_0) n_1}{n_0} + \mathcal{E}_1 = 0. \quad (2.54)$$

Desta maneira, a equação (2.53) dará

$$\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -v_{pert}^2 \frac{\nabla n_1}{n_0}, \quad (2.55)$$

sendo v_{pert}^2 a velocidade de perturbação, definida por

$$v_{pert}^2 \equiv c^2 \frac{p_1}{\mathcal{E}_1} = c^2 \left(\frac{\partial p}{\partial \mathcal{E}} \right)_\sigma. \quad (2.56)$$

O índice σ indica que a derivada é feita à entropia por partícula fixa. Ao combinar as equações para n_1 e \vec{v}_1 é obtido a equação de onda

$$\frac{\partial^2 n_1}{\partial t^2} - v_{pert}^2 \nabla^2 n_1 = 0, \quad (2.57)$$

na qual mostra que a perturbação no fluido se propaga com velocidade igual a v_{pert} , exatamente como em um fluido não-relativístico.

2.4 Equação de Estado

Uma relação importante que descreve as propriedades de um fluido é sua *equação de estado*. É uma relação entre grandezas termodinâmicas que descrevem o fluido ou, mais

especificamente, é uma equação termodinâmica que descreve o estado da matéria sob um dado conjunto de condições iniciais. Existe uma grande classe de fluidos estudados na literatura com equação de estado específica (ver [7]), no entanto, admitindo o universo homogêneo e isotrópico de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker, a expressão mais simples da hidrodinâmica que pode ser utilizada para descrever o fluido que permeia este universo é a equação de estado

$$p = (\gamma - 1)\mathcal{E}, \quad (2.58)$$

sendo $\gamma = \omega + 1$ é denominado de índice barotrópico. O valor dele determina o tipo de fluido analisado. Com $\gamma = 0$ (caso da constante cosmológica) tem-se o limite entre o fluido cosmológico considerado convencional ($\gamma > 0$) e o fluido dito fantasma¹⁸ ($\gamma < 0$). Além disso, existem outros casos característicos determinados pelo índice barotrópico, como, $\gamma = \frac{4}{3}$ para radiação ou $\gamma = 1$, poeira. O caso fantasma, com $\gamma < 0$, implica em $\omega < -1$. Entretanto, observa-se que a maioria dos trabalhos consideram o parâmetro ω para efeito de análise, ou seja, a equação (2.58) toma a forma

$$p = w\mathcal{E}, \quad (2.59)$$

de maneira que, a partir daqui, ω assumirá o papel de parâmetro de equação de estado.

O próximo capítulo tem por objetivo apresentar a ação geral do fluido ideal e, a partir do princípio variacional, obter as mesmas equações de movimento do fluido verificadas neste capítulo.

¹⁸Fluidos que violam as condições de energia do sistema [13–16]

Capítulo 3

Ação Geral do Fluido Ideal

3.1 Introduzindo a Ação do Fluido Ideal

Normalmente o tensor momento-energia de um fluido ideal é utilizado em relatividade geral como fonte de campo gravitacional. A obtenção das equações de movimento deste tipo fluido a partir do *princípio variacional* se torna um pouco complicada devido os vínculos relacionados as variáveis do fluido, no entanto, na literatura existem vários trabalhos que estudam diferentes formulações variacionais [27, 36–38]. Desta maneira, será atribuído um princípio variacional ao fluido ideal que descreverá movimentos simples, o movimento isentrópico assim como o movimento irrotacional do fluido, de modo que, em seguida, este princípio será generalizado para descrever movimentos gerais para um fluido ideal. Esta generalização não altera a forma básica que será atribuída à Lagrangiana, entretanto, acrescenta mais equações de vínculo que deverão ser satisfeitas.

Deste modo, seja ρ , ϵ , s e u^μ , a densidade de massa, a energia interna por unidade de massa, a entropia por unidade de massa e a quadrivelocidade do fluido, respectivamente. As medidas de ρ , ϵ e s são feitas no frame de repouso ao fluido. Em geral, um fluido ideal possui dois graus de liberdade termodinâmicos, de modo que, serão escolhidos a densidade ρ e a entropia s como tais parâmetros. No caso isentrópico, com s constante, todas as variáveis termodinâmicas podem ser escritas em termo de ρ .

É conhecido que o fluido ideal pode ser descrito por duas densidades de Lagrangiana equivalentes, $\mathcal{L}_1 = p$ e $\mathcal{L}_2 = -\mathcal{E}$ [14, 27, 36, 37, 39, 40], entretanto, a forma da densidade de Lagrangiana básica a ser adotada é dada por [27, 36]

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_2 . \quad (3.1)$$

O primeiro termo representa a densidade de Lagrangiana da gravitação e o segundo a densidade de Lagrangiana do fluido ideal [36], dadas respectivamente por

$$\mathcal{L}_G = \frac{1}{2\kappa} R \quad \text{e} \quad \mathcal{L}_2 = -\rho \left[c^2 + \epsilon(\rho) \right] .$$

Sendo $\mathcal{E} = \rho \left[c^2 + \epsilon(\rho) \right]$ [36] e $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$. No entanto, deve-se notar que as variáveis do fluido,

como ρ e u^μ , satisfazem equações de vínculo representadas por (2.44) e (2.48)

$$\begin{aligned}\nabla_\mu (\rho u^\mu) &= 0, \\ g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu + c^2 &= 0.\end{aligned}$$

Assim, a densidade de Lagrangiana do fluido a ser considerada é dada pela soma da \mathcal{L}_2 mais os termos de vínculo

$$\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_2 + \lambda_1 (g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu + c^2) + \lambda_2 \nabla_\mu (\rho u^\mu). \quad (3.2)$$

A ação que representa o acoplamento entre a gravitação e o fluido ideal é dada por

$$\begin{aligned}S[g^{\mu\nu}, \rho, u^\mu, \lambda_1, \lambda_2] &= \int (\mathcal{L}_G + \mathcal{L}_3) \sqrt{-g} d^4x \\ &= \int \left[\frac{1}{2\kappa} R - \rho (c^2 + \epsilon(\rho)) + \right. \\ &\quad \left. + \lambda_1 (g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu + c^2) + \lambda_2 \nabla_\mu (\rho u^\mu) \right] \sqrt{-g} d^4x.\end{aligned} \quad (3.3)$$

Pelo princípio variacional, $\delta S = 0$, logo¹

$$\begin{aligned}\delta S &= \int \delta(\mathcal{L}_G) \sqrt{-g} d^4x + \int \delta(\mathcal{L}_3) \sqrt{-g} d^4x + \int (\mathcal{L}_G + \mathcal{L}_3) \delta(\sqrt{-g}) d^4x \\ &= 0.\end{aligned} \quad (3.4)$$

De modo que, a variação $\delta(\mathcal{L}_G)$ será

$$\delta \mathcal{L}_G = \frac{1}{2\kappa} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}, \quad (3.5)$$

uma vez que foi desprezado termo de fronteira que aparece em $\delta R_{\mu\nu}$. E, como [12]

$$\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{\sqrt{-g}}{2} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}, \quad (3.6)$$

a equação (3.4) toma a forma,

$$\begin{aligned}\delta S &= \int \frac{1}{2\kappa} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x + \\ &\quad + \int \delta(\mathcal{L}_3) \sqrt{-g} d^4x - \int \frac{\mathcal{L}_3}{2} g_{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} d^4x \\ &= \int \frac{1}{2\kappa} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - \frac{\mathcal{L}_3}{2} g_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x + \\ &\quad + \int \delta(\mathcal{L}_3) \sqrt{-g} d^4x \\ &= 0.\end{aligned} \quad (3.7)$$

¹Todas as integrais de fronteiras são desconsideradas.

Dada dependência do sistema físico com respeito às variáveis $g^{\mu\nu}$, ρ , u^μ , λ_1 , λ_2 , a integral com $\delta(\mathcal{L}_3)$ é

$$\begin{aligned} \int \delta(\mathcal{L}_3) \sqrt{-g} d^4x &= \int \frac{\delta\mathcal{L}_3}{\delta g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x + \int \frac{\delta\mathcal{L}_3}{\delta \rho} \delta \rho \sqrt{-g} d^4x + \int \frac{\delta\mathcal{L}_3}{\delta u^\mu} \delta u^\mu \sqrt{-g} d^4x \\ &+ \int \frac{\delta\mathcal{L}_3}{\delta \lambda_1} \delta \lambda_1 + \int \frac{\delta\mathcal{L}_3}{\delta \lambda_2} \delta \lambda_2 . \end{aligned} \quad (3.8)$$

Considerando estas quantidades fixas na fronteira de integração, suas variações $\delta g^{\mu\nu}$, $\delta \rho$, δu^μ , $\delta \lambda_1$ e $\delta \lambda_2$ serão nulas nesta fronteira. Desta maneira, as equações (3.7) e (3.8) obtém-se

$$G_{\mu\nu} = \kappa \left(g_{\mu\nu} \mathcal{L}_3 - 2 \frac{\partial \mathcal{L}_3}{\partial g^{\mu\nu}} \right) = \kappa T_{\mu\nu} , \quad (3.9a)$$

$$\int \frac{\delta\mathcal{L}_3}{\delta \rho} \delta \rho \sqrt{-g} d^4x = 0 , \quad (3.9b)$$

$$\int \frac{\delta\mathcal{L}_3}{\delta u^\mu} \delta u^\mu \sqrt{-g} d^4x = 0 , \quad (3.9c)$$

$$\int \frac{\delta\mathcal{L}_3}{\delta \lambda_1} \delta \lambda_1 \sqrt{-g} d^4x = 0 \implies g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu + c^2 = 0 , \quad (3.9d)$$

$$\int \frac{\delta\mathcal{L}_3}{\delta \lambda_2} \delta \lambda_2 \sqrt{-g} d^4x = 0 \implies \nabla_\mu (\rho u^\mu) = 0 . \quad (3.9e)$$

De modo que (3.9a) são as equações de Einstein do sistema físico. Entretanto, ao resolver $\frac{\delta\mathcal{L}_3}{\delta g^{\mu\nu}}$ e as equações (3.9b) e (3.9c), obtém-se

$$\frac{\partial \lambda_2}{\partial x^\mu} u^\mu = -(c^2 + \epsilon + \rho \epsilon') , \quad (3.10)$$

$$\lambda_1 = \frac{\rho}{2c^2} (c^2 + \epsilon + \rho \epsilon') , \quad (3.11)$$

e o tensor momento-energia

$$T_{\mu\nu} = \rho^2 \epsilon' g_{\mu\nu} + \rho \left(1 + \frac{\epsilon}{c^2} + \rho \frac{\epsilon'}{c^2} \right) u_\mu u_\nu . \quad (3.12)$$

O termo ϵ' representa a derivada da densidade de energia interna com relação a densidade de massa de repouso. Para o frame em questão esta derivada é obtida através da identidade termodinâmica

$$Tds = d\epsilon + pd \left(\frac{1}{\rho} \right) , \quad (3.13)$$

de maneira que, dado um fluxo isentrópico esta última equação fica

$$\frac{d\epsilon}{d\rho} = \frac{p}{\rho^2} . \quad (3.14)$$

Desta maneira, as equações (3.10), (3.11) e (3.12), tomam a forma

$$\frac{\partial \lambda_2}{\partial x^\mu} u^\mu = - \left(c^2 + \epsilon + \frac{p}{\rho} \right), \quad (3.15)$$

$$\lambda_1 = \frac{\rho}{2c^2} \left(c^2 + \epsilon + \frac{p}{\rho} \right), \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= p g_{\mu\nu} + \rho \left(1 + \frac{\epsilon}{c^2} + \frac{p}{\rho c^2} \right) u_\mu u_\nu \\ &= p g_{\mu\nu} + (p + \mathcal{E}) \frac{u_\mu u_\nu}{c^2}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Logo, sabendo que para obter a forma estendida da conservação do tensor momento-energia e a equação de Euler, é necessário projetar a conservação de $T_{\mu\nu}$ paralelamente e perpendicularmente à direção da quadrivelocidade, respectivamente, então, para conservação de (3.17) obtém-se

$$0 = u^\mu \nabla_\mu \rho \left(1 + \frac{\epsilon}{c^2} + \frac{p}{\rho c^2} \right) + \left[\frac{p}{c^2} + \rho \left(1 + \frac{\epsilon}{c^2} + \frac{p}{\rho c^2} \right) \right] \nabla_\mu u^\mu, \quad (3.18)$$

$$0 = \rho \left(1 + \frac{\epsilon}{c^2} + \frac{p}{\rho c^2} \right) u^\nu \nabla_\nu u_\rho + \frac{u_\rho u^\nu}{c^2} \nabla_\nu p + \nabla_\rho p. \quad (3.19)$$

Estas ultimas equações juntamente com de conservação de massa (2.44) e a que representa o movimento isentrópico (3.14) descrevem a dinâmica do fluido.

Agora, do resultado de (3.9c) e da equação (3.11) encontra-se a quadrivelocidade

$$u_\mu = \frac{c^2}{\left(c^2 + \epsilon + \frac{p}{\rho} \right)} \frac{\partial \lambda_2}{\partial x^\mu}. \quad (3.20)$$

3.2 Fluxo Rotacional Isentrópico

A partir do valor de u_μ dada por (3.20) e da equação da quadrivelocidade de rotação do fluido [41]

$$w^\mu = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} u_\nu \frac{\partial u_\alpha}{\partial x^\beta}, \quad (3.21)$$

verifica-se que,

$$\begin{aligned} w^\mu &= \frac{c^4}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \left\{ \left(c^2 + \epsilon + \frac{p}{\rho} \right)^{-1} \frac{\partial \lambda_2}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \lambda_2}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left[\left(c^2 + \epsilon + \frac{p}{\rho} \right)^{-1} \right] \right. \\ &\quad \left. + \left(c^2 + \epsilon + \frac{p}{\rho} \right)^{-2} \frac{\partial \lambda_2}{\partial x^\nu} \frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \right\} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.22)$$

A quadrivelocidade de rotação w^μ é nula pois há uma contração entre o tensor antissimétrico $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ (tensor de Levi-Civita), com dois tensores simétricos, $A_{\alpha\nu} = \frac{\partial\lambda_2}{\partial x^\alpha} \frac{\partial\lambda_2}{\partial x^\nu}$ e $B_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2\lambda_2}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}$.² Desta forma, a Lagrangiana (3.2) descreve apenas um movimento isentrópico irrotacional. Assim, com o intuito de se livrar desta restrição é feita uma generalização do princípio variacional desta Lagrangiana para que ela descreva movimentos isentrópicos rotacionais, bem como irrotacionais. Para que isso ocorra é atribuído para cada partícula um número (uma "identidade") $X(x)$ e é exigido que este número não mude a medida que avançamos com a partícula fluida, isto é,

$$\frac{DX}{d\tau} = \frac{\partial X}{\partial x^\mu} u^\mu = 0. \quad (3.23)$$

Na literatura está equação é denominada *conservação de identidade da partícula* [36].

Desde modo, a densidade de Lagrangiana que deve ser considerada é

$$\mathcal{L}_4 = \mathcal{L}_3 + \lambda_3 \left(\frac{\partial X}{\partial x^\mu} u^\mu \right). \quad (3.24)$$

As variações são feitas como antes, ou seja, são obtidas as equações (3.9) bem como

$$\int \frac{\delta \mathcal{L}_4}{\delta X} \delta X \sqrt{-g} d^4x = 0, \quad (3.25a)$$

$$\int \frac{\delta \mathcal{L}_4}{\delta \lambda_3} \delta \lambda_3 \sqrt{-g} d^4x = 0 \implies \frac{\partial X}{\partial x^\mu} u^\mu = 0. \quad (3.25b)$$

No entanto, ao usar \mathcal{L}_4 nos sistemas (3.9) e (3.25), a alteração vem na equação (3.9c), de maneira que, em vez de (3.20) obtém-se

$$u_\mu = \frac{c^2}{\left(c^2 + \epsilon + \frac{p}{\rho}\right)} \frac{\partial \lambda_2}{\partial x^\mu} - \frac{\lambda_3 c^2}{\rho \left(c^2 + \epsilon + \frac{p}{\rho}\right)} \frac{\partial X}{\partial x^\mu}. \quad (3.26)$$

Substituindo (3.26) em (3.21), obtém-se

$$\begin{aligned} w^\mu = & \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \left\{ -\frac{c^4}{\rho} \left(c^2 + \epsilon + \frac{p}{\rho}\right)^{-2} \frac{\partial \lambda_2}{\partial x^\nu} \frac{\partial \lambda_3}{\partial x^\beta} \frac{\partial X}{\partial x^\alpha} \right. \\ & - c^4 \left(c^2 + \epsilon + \frac{p}{\rho}\right)^{-1} \lambda_3 \frac{\partial \lambda_2}{\partial x^\nu} \frac{\partial X}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left[\frac{1}{\rho} \left(c^2 + \epsilon + \frac{p}{\rho}\right)^{-1} \right] \\ & \left. - \frac{c^4}{\rho} \left(c^2 + \epsilon + \frac{p}{\rho}\right)^{-1} \lambda_3 \frac{\partial \lambda_2}{\partial x^\alpha} \frac{\partial X}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left[\left(c^2 + \epsilon + \frac{p}{\rho}\right)^{-1} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

A quadrivelocidade de rotação do fluido não é necessariamente nula, pois dependerá do valor do quadrigradiente de $X(x)$, ou seja, se este quadrigradiente for ou não igual a zero. Desta forma, ambos movimentos rotacionais e irrotacionais estão inclusos nos extremos do

²O produto entre um tensor simétrico e um antissimétrico ser nulo pode ser visto em [12, 13].

princípio variacional.

Com exceção da equação (3.26) todos os outros resultados obtidos para o movimento do fluido continuam sendo os mesmos. Desta maneira, pode-se descrever todo movimento isentrópico do fluido através da Lagrangiana (3.24).

3.3 Movimentos Generalizados do Fluido

Como dito no início deste capítulo, um fluido ideal possui, em geral, dois graus de liberdade termodinâmicos, de modo que, para o caso estudado, foram escolhidas a densidade de massa e entropia por unidade de massa, todas medidas no referencial de repouso do fluido.

No movimento geral de um fluido ideal a entropia não permanece constante ao longo do fluido, no entanto, ela é constante para uma dada partícula fluida, isto significa que não há nenhuma troca de calor entre as diferentes partes do fluido. Esta condição implica que s não muda a medida que o elemento de volume avança, resultando na equação do movimento adiabático (2.41)

$$u^\mu \frac{\partial s}{\partial x^\mu} = 0 .$$

Desta maneira, a Lagrangiana que deve ser considerada é

$$\mathcal{L}_5 = \mathcal{L}_4 + \lambda_4 \left(\frac{\partial s}{\partial x^\mu} u^\mu \right) . \quad (3.28)$$

A Lagrangiana (3.28) juntamente com L_G fornecem a ação total para o modelo de fluido ideal

$$\begin{aligned} S_T = & \int \left\{ \frac{1}{2\kappa} R - \rho [c^2 + \epsilon(\rho)] + \lambda_1 (g_\mu u^\mu u^\nu + c^2) + \right. \\ & \left. + \lambda_2 \nabla_\mu (\rho u^\mu) + \lambda_3 \left(\frac{\partial X}{\partial x^\mu} u^\mu \right) + \lambda_4 \left(\frac{\partial s}{\partial x^\mu} u^\mu \right) \right\} \sqrt{-g} d^4 x . \end{aligned} \quad (3.29)$$

Assim, as equações de movimento são originadas dos sistemas (3.9), (3.25) e do adicional

$$\int \frac{\delta \mathcal{L}_5}{\delta s} \delta s \sqrt{-g} d^4 x = 0 , \quad (3.30a)$$

$$\int \frac{\delta \mathcal{L}_5}{\delta \lambda_4} \delta \lambda_4 \sqrt{-g} d^4 x = 0 \implies u^\mu \frac{\partial s}{\partial x^\mu} = 0 . \quad (3.30b)$$

Como estão sendo considerados os dois grau de liberdade termodinâmicos, ρ e s , a energia interna por unidade de massa será uma função da forma $\epsilon(\rho, s)$. Com isso, a equação (3.14) é escrita

$$\left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right)_s = \frac{p}{\rho^2} . \quad (3.31)$$

a derivada é feita à entropia por unidade de massa fixa. As equações (3.10), (3.11) e do tensor momento-energia do fluido ideal, (3.17), permanecem inalteradas.

No entanto, ao utilizar \mathcal{L}_5 nos sistemas (3.9), (3.25) e (3.30), o quadrivetor u_μ toma a forma

$$u_\mu = \frac{c^2}{\left(c^2 + \epsilon + \frac{p}{\rho}\right)} \frac{\partial \lambda_2}{\partial x^\mu} - \frac{\lambda_3 c^2}{\rho \left(c^2 + \epsilon + \frac{p}{\rho}\right)} \frac{\partial X}{\partial x^\mu} - \frac{\lambda_4 c^2}{\rho \left(c^2 + \epsilon + \frac{p}{\rho}\right)} \frac{\partial s}{\partial x^\mu}. \quad (3.32)$$

Este valor continua garantindo que a velocidade de rotação do fluido não é necessariamente nula.

A equação de Euler e a forma estendida da conservação de $T_{\mu\nu}$ permanecem inalteradas. Lembrando que a descrição do movimento geral do fluido é garantida por estas duas equações e pelas equações de vínculo postas ao longo da construção de (3.28).

Nos próximos capítulos serão analisados modelos de campos escalares que, dadas as circunstâncias serão apresentadas, estes modelos se comportam efetivamente como fluidos ideais.

Capítulo 4

Modelo de Campo Escalar Canônico

4.1 Correspondência entre os Modelos de Campo Escalar Minimamente Acoplado e Fluido Ideal

Há muitas décadas, modelos de campo escalar estão presentes no estudo de gravitação e cosmologia, de maneira a ter uma particular importância no contexto de universo inflacionário e modelos de quintessência (ver [5, 42–44]). De modo geral, é reconhecido que um campo escalar minimamente acoplado à gravitação pode ser representado como um fluido ideal [28, 29], no entanto, do ponto de vista conceitual um campo escalar e um fluido ideal são sistemas físicos muito diferentes. Como dito no início do capítulo 2 um fluido pode ser tratado como meio contínuo, porém, esta continuidade é perdida quando o fluido é observado de maneira fundamental, ou seja, ao se considerar escalas cada vez menores do fluido nota-se o aparecimento das partículas que o constituem. Entretanto, um campo escalar é fundamentalmente contínuo.

Desta maneira, a densidade de Lagrangiana que representa o modelo de campo escalar minimamente acoplado à gravitação é dada por

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_\phi . \quad (4.1)$$

O segundo termo desta equação é a densidade de Lagrangeana do campo escalar ϕ usual dada por

$$\mathcal{L}_\phi = -\frac{1}{2}\nabla^\mu\phi\nabla_\mu\phi - V(\phi) . \quad (4.2)$$

Este campo auto-interage através de um potencial $V(\phi)$. A ação deste sistema é

$$S = \int (\mathcal{L}_G + \mathcal{L}_\phi) \sqrt{-g} d^4x , \quad (4.3)$$

de modo que, pelo princípio variacional, tem-se

$$\begin{aligned}\delta S &= \int \delta(\mathcal{L}_G) \sqrt{-g} d^4x + \int \delta(\mathcal{L}_\phi) \sqrt{-g} d^4x + \int (\mathcal{L}_G + \mathcal{L}_\phi) \delta(\sqrt{-g}) d^4x \\ &= 0.\end{aligned}\quad (4.4)$$

Das equações (3.5) e (3.6) esta variação toma a forma

$$\begin{aligned}\delta S &= \int \frac{1}{2\kappa} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x + \\ &\quad + \int \delta(\mathcal{L}_\phi) \sqrt{-g} d^4x - \int \frac{\mathcal{L}_\phi}{2} g_{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} d^4x \\ &= 0.\end{aligned}\quad (4.5)$$

A dependência deste sistema é dada em função das variáveis $g^{\mu\nu}$ e ϕ , deste modo, a integral com $\delta(L_\phi)$ é

$$\int \delta(\mathcal{L}_\phi) \sqrt{-g} d^4x = \int \frac{\delta \mathcal{L}_\phi}{\delta g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x + \int \frac{\delta \mathcal{L}_\phi}{\delta \phi} \delta \phi \sqrt{-g} d^4x, \quad (4.6)$$

sendo $\delta g^{\mu\nu}$ e $\delta \phi$ arbitrários, a equação (4.5) fornece o sistema

$$G_{\mu\nu} = \kappa \left(\mathcal{L}_\phi g_{\mu\nu} - 2 \frac{\partial \mathcal{L}_\phi}{\partial g^{\mu\nu}} \right) = \kappa T_{\mu\nu}^{(\phi)}, \quad (4.7a)$$

$$\int \left(\frac{\delta \mathcal{L}_\phi}{\delta \phi} \right) \delta \phi \sqrt{-g} d^4x = 0. \quad (4.7b)$$

Verifica-se da equação (4.7a) que o tensor momento-energia do campo escalar, $T_{\mu\nu}^{(\phi)}$, é

$$\begin{aligned}T_{\mu\nu}^{(\phi)} &= \mathcal{L}_\phi g_{\mu\nu} - 2 \frac{\partial \mathcal{L}_\phi}{\partial g^{\mu\nu}} \\ &= \left[-\frac{1}{2} \nabla^\mu \phi \nabla_\mu \phi - V(\phi) \right] g_{\mu\nu} - 2 \frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu}} \left[-\frac{1}{2} \nabla^\mu \phi \nabla_\mu \phi - V(\phi) \right] \\ &= \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla^\rho \phi \nabla_\rho \phi - V g_{\mu\nu}.\end{aligned}\quad (4.8)$$

A integral (4.7b) fornece a seguinte equação diferencial satisfeita por um campo escalar usual

$$\nabla^\mu \nabla_\mu \phi = V'(\phi), \quad (4.9)$$

sendo $V'(\phi)$ a derivada do potencial em relação ao campo escalar. Desta maneira, as equações (4.7a) e (4.9) formam as equações de movimento deste sistema físico.

Agora, para que o tensor $T_{\mu\nu}^{(\phi)}$ assuma a forma do tensor momento-energia do fluido ideal (2.42) é necessário que $\nabla^\mu \phi$ seja um campo vetorial tipo tempo [21,28,29]. A componente covariante da quadrivelocidade do fluido efetivo do campo escalar, em termos do gradiente

de ϕ , pode ser tomada da seguinte forma [21]

$$u_\mu = c \frac{\nabla_\mu \phi}{\sqrt{|\nabla^\nu \phi \nabla_\nu \phi|}}, \quad (4.10)$$

assumindo que $\nabla^\nu \phi \nabla_\nu \phi \neq 0$. A normalização da quadrivelocidade é

$$u^\mu u_\mu = c^2 \frac{\nabla^\nu \phi \nabla_\nu \phi}{|\nabla^\alpha \phi \nabla_\alpha \phi|}. \quad (4.11)$$

Como $\nabla^\mu \phi$ é tipo tempo então $\nabla^\alpha \phi \nabla_\alpha \phi < 0$, que resultará

$$u^\mu u_\mu = -c^2.$$

A densidade de energia e a pressão relativas para um observador que se move junto ao fluido são obtidas através das seguintes equações¹

$$\mathcal{E} = T_{\mu\nu} \frac{u^\mu u^\nu}{c^2} \quad (4.12a)$$

e

$$p = \frac{1}{3} T_{\mu\nu} h^{\mu\nu}. \quad (4.12b)$$

Para o caso do tensor $T_{\mu\nu}^{(\phi)}$, (4.12) toma a forma

$$\mathcal{E}^{(\phi)} = -\frac{1}{2} \nabla^\alpha \phi \nabla_\alpha \phi + V(\phi) \quad (4.13a)$$

e

$$p^{(\phi)} = -\frac{1}{2} \nabla^\alpha \phi \nabla_\alpha \phi - V(\phi). \quad (4.13b)$$

Deste modo, a partir das equações (4.10) e (4.13), o tensor momento-energia do campo escalar pode ser obtido do tensor $T_{\mu\nu}$ do fluido ideal, isto é,

$$p g_{\mu\nu} + (p + \mathcal{E}) \frac{u_\mu u_\nu}{c^2} = \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla^\rho \phi \nabla_\rho \phi - V g_{\mu\nu} \equiv T_{\mu\nu}^{(\phi)}. \quad (4.14)$$

Esta ultima equação não mostra somente que um campo escalar minimamente acoplado pode ser descrito por um modelo de fluido ideal, mas também que qualquer fluido ideal, com equação barotrópica $p = p(\mathcal{E})$, pode ser reproduzido por um campo escalar, de maneira que este tenha um potencial adequado $V(\phi)$.

A afirmação do início deste capítulo na qual diz que um campo escalar não é composto

¹Estas equação são validas quando se relaciona um $T_{\mu\nu}$ qualquer com um tensor momento-energia do *fluido Ideal*.

fundamentalmente por partículas mostra que, de modo geral, não faz sentido falar de conservação do número de partículas para um fluido efetivo de ϕ , ou seja, um campo escalar não é dotado de uma equação do tipo (2.44), que descreve a conservação de massa². Neste sentido, este fluido é dito do tipo irrotacional devido não haver uma conservação de identidade de partícula (3.23), já que esta assegurava também a existência de fluxos rotacionais no fluido. Além disso, a priori, nada se pode afirmar sobre a entropia do fluido efetivo de ϕ , no entanto, ao compará-lo à um *fluido ideal* isentrópico isto faz com que seja natural associar ϕ com σ [45].

As projeções da conservação do tensor $T_{\mu\nu}$ de um fluido ideal também fornecem resultados satisfatórios quando nelas são utilizadas as equações (4.10) e (4.13). A forma estendida da conservação do tensor momento-energia (2.45) fornece a equação (4.9), enquanto que a forma relativística da equação de Euler gera a identidade obtida em espaços sem torção, o qual diz que o comutador de derivadas covariantes atuando em um escalar é igual a zero, $[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\phi = 0$.

A velocidade das perturbações em fluidos efetivos de campo escalar não podem, em geral, ser obtidas pela equação (2.56), isto se deve ao fato de não ser possível inverter as funções³ $p = p(X, \phi)$ e $\mathcal{E} = \mathcal{E}(X, \phi)$ a fim de fornecer a equação barotrópica $p = p(\mathcal{E})$.⁴ Entretanto, ao assumir ϕ e X como variáveis independentes pode-se definir v_{pert} como a razão das diferenciais totais dp e $d\mathcal{E}$ à σ fixo, ou seja,

$$v_{pert}^2 = c^2 \left(\frac{p_X dX + p_\phi d\phi}{\mathcal{E}_X dX + \mathcal{E}_\phi d\phi} \right)_\sigma, \quad (4.15)$$

sendo $p_X = \frac{\partial p}{\partial X}$ e $p_\phi = \frac{\partial p}{\partial \phi}$. O caso isentrópico implica que $d\phi = 0$ equivale à $d\sigma = 0$ [45], desta forma, (4.15) fica

$$v_{pert}^2 = c^2 \frac{p_X}{\mathcal{E}_X}. \quad (4.16)$$

É importante deixar claro que $d\phi = 0$ não significa dizer que o campo é constante, isto resultaria que a teoria estudada seria bastante trivial, pois $X = 0$. Nestas considerações, o valor $d\phi = 0$ expressa que as diferenciais totais dp e $d\mathcal{E}$ devem ser calculadas mantendo o campo ϕ fixo (ele continua variável no espaço-tempo) enquanto permite que X varie de forma arbitrária. Nota-se que esta expressão é válida para qualquer função $V(\phi)$. Para o modelo de campo escalar canônico a velocidade de perturbações no fluido efetivo de ϕ é $v_{pert} = c$.

Além do ϕ usual, existem outros tipos de campo que, dependendo do regime que estão colocados, afetam a estabilidade do sistema. Estes campos são chamados de táquions e fantasmas. As características usadas para definir estes campos são retiradas de [30] e de

²Para o caso de um fluido ideal isentrópico são possíveis obter estes valores (ver [45]).

³Sendo $X \equiv -\frac{1}{2}\nabla^\mu\phi\nabla_\mu\phi$ o termo cinético do campo escalar [22]

⁴Uma vez que $V(\phi) = 0$ ou $V = cte$ pode-se obter $p = p(\mathcal{E})$.

suas respectivas referências. Desta forma, campos do tipo táquions são obtidos quando a energia potencial $V(\phi)$ é negativa. Estes tipos de campo possuem soluções oscilatórias se a velocidade das perturbações for maior que c , isto indica que este movimento é natural para táquions. Campos do tipo fantasma aparecem quando o sinal global da densidade de Lagrangiana é trocado ($\mathcal{L}_\phi \rightarrow -\mathcal{L}_\phi$), entretanto, seu potencial é definido positivo e este campo possui solução do tipo oscilatória. Se não houver nenhuma interação, esse campo não fornecerá nenhum tipo de comportamento exótico, no entanto, ele tem a tendência de transmitir diferença de energia positiva ao interagir com um campo usual. Existe um outro tipo de campo chamado fantasma-taquiônico. Eles também surgem quando o sinal global da densidade de Lagrangiana é modificado, no entanto, possuem energia potencial negativa. Eles não admitem equações de movimento oscilatórias e suas soluções são do tipo exponenciais.

4.2 Representações sobre a Dinâmica de Fluido Não Usual

Fluido

As equações de movimento da relatividade geral características de um fluido ideal que permeia o universo são dadas pela conservação do tensor momento-energia (2.43) e pelas equações de Einstein (3.9a) [1–3]. Admitindo o universo homogêneo e isotrópico de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker com curvatura nula e elemento de linha, em coordenadas comóveis, dado por

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2) , \quad (4.17)$$

sendo $a(t)$ o fator de escala do universo. As equações de movimento do sistema serão

$$3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = c^2\kappa\mathcal{E} , \quad (4.18)$$

$$-2\frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = c^2\kappa p , \quad (4.19)$$

denominadas equações de Friedmann. Além disso, desta duas equações obtém-se

$$\dot{\mathcal{E}} + 3(1 + \omega)\frac{\dot{a}}{a}\mathcal{E} = 0 , \quad (4.20)$$

sendo $\frac{\dot{a}}{a}$ o parâmetro de Hubble. Considera-se também a equação de estado de fluido barotrópico (2.59). Combinando as duas equações de Friedmann tem-se

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{c^2\kappa}{6}(\mathcal{E} + 3p) . \quad (4.21)$$

A simples análise do termo $\mathcal{E} + 3p$ implica se o universo está ou não em expansão acelerada. Entretanto, precisa-se verificar o comportamento entre a densidade de energia e o fator de

escalar.

De (4.20) obtém-se a solução para ω constante

$$\mathcal{E} \propto a^{-3(1+\omega)} . \quad (4.22)$$

Com este resultado, observa-se que com $\omega > -1$, \mathcal{E} e $a(t)$ são inversamente proporcionais, enquanto que, para $\omega < -1$, \mathcal{E} e $a(t)$ são diretamente proporcionais. A proporção direta entre o fator de escala e a densidade de energia pode indicar uma possível singularidade futura. Para verificar de que forma isto pode ocorrer é preciso escrever a densidade de energia em função do tempo e analisar seu comportamento. Assim, de (4.18) e (4.22) obtém-se

$$a(t) \propto t^{\frac{2}{3(1+\omega)}} , \quad (4.23)$$

assim, utilizando novamente (4.22) tem-se

$$\mathcal{E} \propto t^{-2} . \quad (4.24)$$

Para o caso de fluido fantasma, que corresponde a $\omega < -1$ verifica-se que o fator de escalar tende a infinito num tempo finito, ou seja, quando t vem de um tempo inicial $-\infty$ e tende a zero no futuro. Neste cenário, a densidade de energia também aumenta, tendendo a um valor infinito. Este tipo de comportamento é exatamente oposto ao do fluido usual (não fantasma), pois neste caso a densidade de energia também tende a um valor infinito quando t e $a(t)$ vão a zero. A singularidade apresentada pelo modelo que utiliza o fluido fantasma é denominada *Big Rip* [17–19].

Campos

Para o caso de uma representação em termos de campos, tem-se a seguinte densidade de Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_\phi + \mathcal{L}_f ,$$

sendo \mathcal{L}_ϕ a densidade de Lagrangiana de campo escalar canônico e \mathcal{L}_f a densidade de Lagrangiana do campo fantasma,

$$\mathcal{L}_f = \frac{1}{2} \nabla^\mu \phi_f \nabla_\mu \phi_f + V(\phi_f) , \quad (4.25)$$

de modo que, ϕ_f é o campo fantasma. Como definido anteriormente, a diferença entre o comportamento de um campo fantasma e de um campo considerado normal está na troca do sinal global de \mathcal{L}_ϕ , como pode ser visto nesta última equação, com potencial $V(\phi)$ positivo.

O tensor momento energia de campo fantasma é dado por

$$T_{\mu\nu}^{(f)} = -\nabla_\mu \phi_f \nabla_\nu \phi_f + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla^\rho \phi_f \nabla_\rho \phi_f + V g_{\mu\nu} . \quad (4.26)$$

Novamente, admitindo o universo homogêneo e isotrópico de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker com curvatura nula e elemento de linha, em coordenadas comóveis, dado por (4.17), a densidade de energia e a pressão na representação de campos para o fluido fantasma são:

$$\mathcal{E}^{(f)} = -\frac{\dot{\phi}_f^2}{2c^2} - V(\phi_f), \quad (4.27)$$

$$p^{(f)} = -\frac{\dot{\phi}_f^2}{2c^2} + V(\phi_f). \quad (4.28)$$

Para o caso de um campo ordinário o termo cinético é positivo, ao contrário do que se observa aqui para o campo fantasma. Portanto, é o termo energia cinética negativo que difere os campos fantasmas dos demais. Estas quantidades indicam que há violação de condição de energia nula ($\mathcal{E} + p \geq 0$), pois

$$\mathcal{E}^{(f)} + p^{(f)} = -\dot{\phi}_f^2 < 0, \quad (4.29)$$

uma vez que $\phi_f = \phi_f(t)$.⁵ Além disso, da equação de estado de fluido barotrópico (2.59), verifica-se que o parâmetro de equação de estado nesse cenário é

$$\omega = \frac{-\frac{\dot{\phi}_f^2}{2c^2} + V(\phi_f)}{-\frac{\dot{\phi}_f^2}{2c^2} - V(\phi_f)}. \quad (4.30)$$

Desta equação observa-se que $\omega < -1$ quando $\dot{\phi}^2 < -2V(\phi)$. A análise do comportamento de um campo fantasma depende do tipo de potencial escolhido para descrever esse campo e da escala observada. A singularidade de *Big Rip* pode, talvez, ser contornado através de uma escolha adequada do potencial usado na solução das equações de movimento.

O próximo capítulo mostrará outro modelo de campo escalar minimamente acoplado que, da mesma forma que o modelo canônico, mimetiza um fluido ideal.

⁵Válido também para o campo convencional.

Capítulo 5

Modelo de Campo Escalar tipo K-essência

5.1 Correspondência entre Modelo de Campo Escalar tipo K-essência e Fluido Ideal

Uma alternativa para explorar novas possibilidades de implementar uma evolução inflacionária do universo primitivo é adotar modelos que apresentam termos cinéticos não-canônicos na Lagrangiana campo escalar, denominados modelos de *K-essência* (ver [22, 31–33]). Aqui, o objetivo é procurar correspondências existentes entre este e o modelo de fluido ideal, como feito no capítulo 4. De modo geral, a densidade de Lagrangiana que descreve o modelo de K-essência depende tanto do termo cinético como do próprio campo ϕ , de modo que¹

$$\mathcal{L}_K = f(\phi, X) - V(\phi) , \quad (5.1)$$

assumindo que $f(\phi, X)$ é uma função bem comportada de duas variáveis, o campo ϕ e o termo cinético X . O potencial $V(\phi)$ é definido da mesma forma do capítulo anterior. Desta maneira, a ação que descreve o acoplamento mínimo entre a gravitação e o campo ϕ tipo K-essência é

$$S = \int (\mathcal{L}_G + \mathcal{L}_K) \sqrt{-g} d^4x . \quad (5.2)$$

¹Além do modelo de K-essência, esta densidade de Lagrangiana também inclui como caso particular os modelos de campo escalar canônico e Dirac-Born-Infeld [46–52].

A variação desta ação resulta no seguinte sistema

$$G_{\mu\nu} = \kappa \left(\mathcal{L}_K g_{\mu\nu} - 2 \frac{\partial \mathcal{L}_K}{\partial g^{\mu\nu}} \right) = \kappa T_{\mu\nu}^{(K)}, \quad (5.3a)$$

$$\int \left(\frac{\delta \mathcal{L}_K}{\delta \phi} \right) \delta \phi \sqrt{-g} d^4x = 0, \quad (5.3b)$$

notando que a dependência deste sistema físico é dada em função das variáveis $g^{\mu\nu}$ e ϕ , de modo que, suas variações foram consideradas arbitrárias.

Da equação (5.3a) o tensor momento-energia será

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{(K)} &= \mathcal{L}_K g_{\mu\nu} - 2 \frac{\partial \mathcal{L}_K}{\partial g^{\mu\nu}} \\ &= [f(\phi, X) - V(\phi)] g_{\mu\nu} - 2 \frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu}} [f(\phi, X) - V(\phi)] \\ &= \frac{\partial f(\phi, X)}{\partial g^{\mu\nu}} + f(\phi, X) g_{\mu\nu} - V(\phi) g_{\mu\nu} \\ &= \frac{\partial f(\phi, X)}{\partial X} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi + f(\phi, X) g_{\mu\nu} - V(\phi) g_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

A integral (5.3b) fornece a seguinte equação diferencial satisfeita por um campo escalar usual

$$\nabla^\mu \left(\frac{\partial f(\phi, X)}{\partial X} \nabla_\mu \phi \right) = V'(\phi), \quad (5.5)$$

sendo $V'(\phi)$ a derivada do potencial em relação ao campo escalar. As equações (5.3a) e (5.5) formam as equações de movimento deste sistema físico.

A correspondência entre o modelo de K-essência e de fluido ideal é feita quando $T_{\mu\nu}^{(K)}$ assume a forma do tensor momento-energia do fluido ideal. Para isto, considera-se novamente que $\nabla_\mu \phi$ seja um campo vetorial tipo tempo. Desta forma, a quadrivelocidade do fluido efetivo é dada por (4.10), com normalização $u^\mu u_\mu = -c^2$. A densidade de energia e a pressão são obtidas aplicando $T_{\mu\nu}^{(K)}$ nas equações (4.12a) e (4.12b), assim

$$\mathcal{E}^{(K)} = 2X \frac{\partial f(\phi, X)}{\partial X} - f(\phi, X) + V(\phi) \quad (5.6)$$

e

$$p^{(K)} = f(\phi, X) - V(\phi). \quad (5.7)$$

Estas quantidade possibilitam expressar $T_{\mu\nu}^{(K)}$ como um tensor momento-energia do *fluido ideal*

$$p g_{\mu\nu} + (p + \mathcal{E}) \frac{u_\mu u_\nu}{c^2} = \frac{\partial f(\phi, X)}{\partial X} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - f(\phi, X) g_{\mu\nu} - V(\phi) g_{\mu\nu} \equiv T_{\mu\nu}^{(\phi)}. \quad (5.8)$$

Substituindo (5.6) e (5.7) na forma estendida da conservação de $T_{\mu\nu}$ do fluido ideal resulta na equação diferencial (5.5), enquanto que a forma relativística da equação de Euler fornece novamente a identidade $[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\phi = 0$.

Como no capítulo 4, equações que descrevem a conservação do número de partículas e de massa não podem ser determinadas, devido a densidade do número de partículas n não poder ser genericamente determinada. O mesmo se equivale à densidade de entropia σ . Ao restringir este caso à isentropia estes valores são bem determinados (ver [45]).

Do capítulo anterior sabe-se que, num caso geral e a menos que o potencial seja constante ou nulo, a velocidade propagação de perturbações no fluido efetivo é obtida pela equação (4.15). Para o regime isentrópico a equação (4.16) é válida, de maneira que, para uma função $f(\phi, X)$, tem-se

$$v_{pert}^2 = c^2 \frac{f_X}{f_X + 2Xf_{XX}} . \quad (5.9)$$

5.2 Caso Particular $f(\phi, X) = \alpha X^n$

Nota-se que até o presente momento todas as equações foram obtidas em termos de um $f(\phi, X)$ arbitrário, no entanto, precisa-se dar uma forma para esta função com objetivo de analisar características relevantes do modelo. Assim, considera-se o seguinte caso particular

$$f(\phi, X) = \alpha \left(-\frac{1}{2} \nabla^\alpha \phi \nabla_\alpha \phi \right)^n = \alpha X^n , \quad (5.10)$$

sendo $\alpha = \pm 1$ e n um número real diferente de zero. Essa forma para $f(\phi, X)$ foi também estudada em [53, 54]. Desta maneira, dado (5.10) o tensor momento-energia $T_{\mu\nu}^{(K)}$ e a equação diferencial de ϕ , tornam-se

$$T_{\mu\nu}^{(K)} = \alpha n X^{n-1} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi + \alpha X^n g_{\mu\nu} - V(\phi) g_{\mu\nu} , \quad (5.11)$$

$$\alpha n \nabla^\alpha (X^{n-1} \nabla_\alpha \phi) = V'(\phi) . \quad (5.12)$$

A densidade de energia e a pressão do fluido efetivo ficam

$$\mathcal{E}^{(K)} = \alpha(2n - 1)X^n + V(\phi) , \quad (5.13)$$

$$p^{(K)} = \alpha X^n - V(\phi) . \quad (5.14)$$

O caso isentrópico fornece, a partir de (5.9), a seguinte expressão para velocidade de perturbação²

$$v_{pert}^2 = c^2 \frac{1}{2n - 1} . \quad (5.15)$$

²Esta expressão também é obtida quando se utiliza (2.56) no caso de campo escalar livre.

Percebe-se que velocidades permitidas encontram-se na região de $n > \frac{1}{2}$, pois o denominador em (5.15) deve ser positivo. Porém, o valor $n > 1$ garante que a velocidade de propagação seja menor de a velocidade da luz c . A velocidade v_{pert} diverge para $n = \frac{1}{2}$ e assume valor imaginário em $n < \frac{1}{2}$.

Como exemplo, considera-se o espaço-tempo cosmológico dado por (4.17). Para este modelo, as equações de Friedmann e a equação diferencial para ϕ têm a forma

$$3H^2 = c^2 \kappa \mathcal{E}^{(K)}, \quad (5.16)$$

$$-2\dot{H} - 3H^2 = c^2 \kappa p^{(K)}, \quad (5.17)$$

$$n\alpha \left[(2n-1)\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} \right] \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2c^2} \right)^{(n-1)} = -c^2 V'(\phi), \quad (5.18)$$

sendo $H = \frac{\dot{a}}{a}$. A densidade de energia e a pressão são escritas na forma

$$\mathcal{E}^{(K)} = \left[\alpha(2n-1) \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2c^2} \right)^n + V(\phi) \right], \quad (5.19)$$

$$p^{(K)} = \left[\alpha \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2c^2} \right)^n - V(\phi) \right]. \quad (5.20)$$

Para que sinal do termo cinético da equação que expressa a densidade de energia não seja negativo admite-se que para $n > \frac{1}{2}$, $\alpha = 1$, ou, no caso de $n < \frac{1}{2}$, $\alpha = -1$, descartando o valor de $n = \frac{1}{2}$.

Estudos sobre a ocorrência de instabilidade neste modelo ficam difíceis de serem estudadas quando se mantém o potencial arbitrário. Como exemplo, considera-se $V(\phi) = 0$. Nesta condição, verifica-se que a densidade de energia e a pressão fornecem uma equação de estado do tipo barotrópica $p = \omega \mathcal{E}$. A relação entre o parâmetro de equação de estado e n é dada por

$$\omega = \frac{1}{2n-1}. \quad (5.21)$$

A princípio, a região de $n < \frac{1}{2}$ é descartada pois fornece velocidades imaginárias para v_{pert} . Entretanto, da equação de onda, verifica-se que estas quantidades de n voltam a ser consideradas, devido esta equação levar em conta o quadrado de v_{pert} .

Ainda neste exemplo, nota-se violação de causalidade por análise de condição de energia dominante. Desta condição sabe-se que $\mathcal{E} \geq |p|$, assim, de (5.19) e (5.20), obtém-se

$$\alpha(2n-1) \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2c^2} \right)^n \geq \left| \alpha \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2c^2} \right)^n \right|, \quad (5.22)$$

verifica-se que para $\alpha = 1$ e $\frac{1}{2} < n < 1$ há violação da condição de energia dominante, o mesmo ocorre para $\alpha = -1$ e $0 < n < \frac{1}{2}$. O intervalo $\frac{1}{2} < n < 1$ corresponde à $\omega > 1$, enquanto que, a região $0 < n < \frac{1}{2}$ corresponde à $\omega < -1$. Agora, da condição de energia nula, $\mathcal{E} + p \geq 0$,

ou, para este caso

$$\alpha(2n - 1) \left(\frac{\dot{\phi}}{2c^2} \right)^n + \alpha \left(\frac{\dot{\phi}}{2c^2} \right)^n \geq 0, \quad (5.23)$$

por análise direta, nota-se que esta condições somente é violada quando $\alpha = -1$ e $0 < n < \frac{1}{2}$, equivalente à $\omega < -1$ (assinatura de um campo escalar não usual).

O próximo capítulo dedica-se analisar qualitativamente, através do método de sistemas dinâmicos, as soluções de três modelos cosmológicos, de fluido usual, de campo escalar canônico e de campo escalar tipo K-essência.

Capítulo 6

Análise Qualitativa de Modelos Cosmológicos

Agora, será utilizado o método de sistemas dinâmicos como forma de obter qualitativamente informações sobre a evolução de três tipos de modelos cosmológicos, o modelo de fluido, campo escalar canônico e campo tipo K-essência, verificando suposições idealizadas sobre os processos físicos sobre cada sistema. Este método pode ser visto de forma detalhada em [24–26]. Por simplicidade, a construção dos diagramas de espaço de fase serão obtidos com $\kappa = c = 1$.

6.1 Modelo Cosmológico com Matéria, Radiação e Constante Cosmológica

Ação e Equações de Movimento

O primeiro caso analisado é de um modelo que represente a evolução do universo depois de um regime de inflação (ver [26]). A ação que representa o acoplamento entre a gravitação, constante cosmológica e conteúdo material é dada por

$$S = \int \left[\frac{1}{2} (R - 2\Lambda) + \mathcal{L}_M \right] \sqrt{-g} d^4x, \quad (6.1)$$

a diferença deste modelo e do capítulo (3) fica no acréscimo do termo de constante cosmológica Λ . A densidade de Lagrangeana \mathcal{L}_M é representada por (3.28). Desta maneira, as equações de movimento resultantes deste modelo serão

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}. \quad (6.2)$$

Uma vez que $T_{\mu\nu}$ é o tensor momento-energia do fluido ideal. Utilizando o espaço-tempo cosmológico caracterizado por (4.17), estas equações de movimento tornam-se as equações

de Friedmann

$$3H^2 - \Lambda = \mathcal{E}, \quad (6.3)$$

$$-2\dot{H} - 3H^2 + \Lambda = p. \quad (6.4)$$

Estas equações fornecem

$$\dot{\mathcal{E}} + 3H(p + \mathcal{E}) = 0. \quad (6.5)$$

O conjunto de equações (6.3), (6.4) e (6.5), descrevem a dinâmica deste modelo.

Soluções das Equações de Movimento

Dada equação de estado (2.59), as equações de Friedmann (6.3) e (6.4), e a equação (6.5), pode-se obter duas possíveis soluções para o fator de escala do universo, $a(t)$. Para $\omega \neq 1$ e $\Lambda \approx 0$, obtém-se

$$a(t) \propto t^{\frac{2}{3(1+\omega)}}.$$

Para $\omega = -1$, que corresponde ao caso com constante cosmológica, ou seja, $\Lambda \neq 0$, tem-se

$$a(t) \propto e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t}.$$

Soluções particulares que caracterizam expansão de um universo desacelerado ou acelerado são representados, respectivamente, por $\omega > -\frac{1}{3}$ e $\omega < -\frac{1}{3}$. No caso de $\omega = -\frac{1}{3}$, a solução é do tipo estacionária pois $a \propto t$, resultando em $\dot{a} > 0$ e $\ddot{a} = 0$. Agora, de (6.5) tem-se uma relação entre a densidade de energia e o fator de escala

$$\mathcal{E} \propto a^{-3(1+\omega)}.$$

Deste modo, verifica-se que o conteúdo de radiação, $\omega = \frac{1}{3}$ e $\mathcal{E} \propto a^{-4}$, decai mais rapidamente do que a matéria, $\omega = 0$ e $\mathcal{E} \propto a^{-3}$, uma vez que se considera a expansão do universo.

Em um universo realista, o comportamento do fator de escala deverá sempre mudar com o tempo. Assim, atribuindo o paradigma inflacionário e levando em conta resultados do parâmetro de desaceleração, $q = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2}$,¹ o modelo mais realista atribuído ao universo terá um comportamento inflacionário inicial e final, de maneira há existir um comportamento não-inflacionário entre estes dois estágios (ver [1–3]).

Diagrama do Espaço de Fase

Caracterizando o conteúdo material deste modelo por radiação e matéria (tipo poeira), ou seja, $\omega = \frac{1}{3}$ e $\omega = 0$, respectivamente, e considerando as densidades de energia destas

¹ Estes resultados são obtidos através de medições de supernovas tipo Ia.

quantidades representadas por \mathcal{E}_m (matéria) e \mathcal{E}_r (radiação), as equações de movimento (6.3), (6.4) e (6.5) ficam

$$3H^2 - \Lambda = \mathcal{E}_m + \mathcal{E}_r, \quad (6.6a)$$

$$-2\dot{H} - 3H^2 + \Lambda = \frac{\mathcal{E}_r}{3}, \quad (6.6b)$$

$$\dot{\mathcal{E}}_r + 3H\mathcal{E}_r = 0, \quad (6.6c)$$

$$\dot{\mathcal{E}}_m + 4H\mathcal{E}_m = 0. \quad (6.6d)$$

Da equação (6.6a) obtém-se a equação de vínculo

$$1 = \Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda, \quad (6.7)$$

sendo $\Omega_m = \frac{\mathcal{E}_m}{3H^2}$, $\Omega_r = \frac{\mathcal{E}_r}{3H^2}$ e $\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2}$, os parâmetros adimensionais de densidade. De (6.7) observa-se que existem duas quantidades independentes, isto permite escolher dois parâmetros para construção do diagrama de fase. Escolhendo Ω_m e Ω_r como tais parâmetros, as soluções do sistema (6.6), em qualquer instante t , corresponderão ao plano (Ω_m, Ω_r) .

Sabendo que as densidade de energia são positivas definidas, os parâmetros de matéria e radiação admitem as condições $0 \leq \Omega_m \leq 1$ e $0 \leq \Omega_r \leq 1$. Para que a equação de vínculo (6.7) seja satisfeita o parâmetro adimensional de densidade para Λ deve assumir o valor $\Omega_\Lambda \leq 1$. Assim, a equação de vínculo juntamente com as desigualdades mencionadas reduzem o plano (Ω_m, Ω_r) ao triângulo

$$\Delta = \{(\Omega_m, \Omega_r) | 0 \leq \Omega_m + \Omega_r \leq 1 \cap 0 \leq \Omega_m \leq 1 \cap 0 \leq \Omega_r \leq 1\}, \quad (6.8)$$

de modo que, cada solução do sistema (6.6) corresponderão às trajetórias contidas neste triângulo.

O sistema dinâmico é formado pelas equações que fornecem a evolução temporal de Ω_m e Ω_r . Desta maneira, a derivada no tempo do parâmetro da matéria será

$$\frac{d\Omega_m}{dt} = \frac{1}{3H} \left(\frac{\dot{\mathcal{E}}_m}{H} - \frac{2\dot{H}\mathcal{E}_m}{H^2} \right). \quad (6.9)$$

O objetivo é obter equações em termos somente das grandezas adimensionais, logo, utilizando as equações (6.6b), (6.6d) e (6.7), assim como as quantidades atribuídas aos parâmetros adimensionais, a (6.9) torna-se

$$\frac{1}{H} \frac{d\Omega_m}{dt} = \Omega_m(3\Omega_m + 4\Omega_r - 3). \quad (6.10)$$

Notando que

$$d \ln a = \frac{\dot{a}}{a} dt = H dt, \quad (6.11)$$

introduz-se uma nova variável temporal $N = \ln a$, de maneira que $\frac{d\Omega_m}{dN} = \Omega'_m$. Assim, a equação (6.10) fica

$$\Omega'_m = \Omega_m(3\Omega_m + 4\Omega_r - 3) . \quad (6.12)$$

A relação para de Ω'_r é obtida da mesma forma feita para encontrar Ω'_m . Então

$$\Omega'_r = \Omega_r(3\Omega_m + 4\Omega_r - 4) , \quad (6.13)$$

desta maneira, as equações (6.12) e (6.13) formam o sistema dinâmico do modelo. As trajetórias que representarão as soluções deste sistema estarão contidas no interior do triângulo (6.8).

Os pontos críticos são obtidos fazendo $\Omega'_m = 0$ e $\Omega'_r = 0$, no par (Ω_m, Ω_r) , que resultará em $O = (0, 0)$, $R = (0, 1)$ e $M = (1, 0)$. Destes pontos percebe-se que em R a radiação predomina e há ausência de matéria, enquanto que em M há predominantemente matéria. A partir da equação (6.7), verifica-se que a constante cosmológica é predominante em O . A natureza de cada ponto é fornecida a partir dos autovalores obtidos da matriz jacobiana do sistema dinâmico, avaliada em cada ponto. Desta maneira, verifica-se que existem dois autovalores negativos para O , isto significa dizer que ele é do tipo estável, portanto, todas as trajetórias serão atraídas para este ponto crítico. O ponto M possui um autovalor negativo e outro positivo, assim, ele é do tipo ponto de sela. Algumas trajetórias são atraídas por M mas logo são repelidas, movendo-se à O . Por fim, R possui dois autovalores positivos, caracterizando-o como um ponto instável, portanto, todas as trajetórias são repelidas dele. A figura (6.1) fornece o diagrama do espaço de fase deste modelo. Nele poderá ser visto com clareza as características mencionadas acima. No contexto cosmológico este diagrama fornece algumas interpretações importantes. Considera-se um universo espacialmente plano preenchido por matéria e radiação, e por uma constante cosmológica Λ . Em tempos primordiais, este universo é dominado por radiação, em seguida ele passa por um período onde a matéria (tipo poeira) é dominante. Eventualmente ele evoluirá para um estado onde Λ domina. Este resultado está de acordo com a expectativa de um bom modelo cosmológico [1–3]. No caso de Λ assumir um valor consideravelmente grande a matéria nunca predominará, isto leva a uma transição direta entre a era da radiação para a da constante cosmológica.

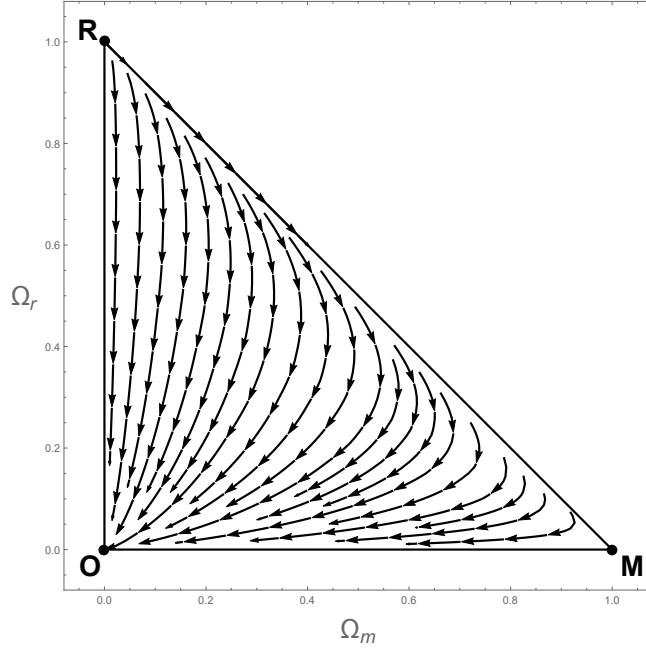


Figura 6.1. Diagrama do Espaço de Fase do modelo cosmológico com matéria tipo poeira, radiação e constante cosmológica.

6.2 Modelo Cosmológico com Campo Escalar Canônico mais Potencial

Ação e Equações de Movimento

O próximo caso a ser analisado é do acoplamento mínimo entre a gravitação e um campo escalar canônico auto-interagente (ver [55]), mencionada no capítulo 4 e tem a forma

$$S = \int \left(\frac{1}{2}R - \frac{1}{2}\nabla^\mu\phi\nabla_\mu\phi - V(\phi) \right) \sqrt{-g}d^4x ,$$

esta ação fornece as equações de movimento (4.7a) e (4.9),

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} &= T_{\mu\nu}^{(\phi)} , \\ \nabla^\mu\nabla_\mu\phi &= V'(\phi) . \end{aligned}$$

Sendo $T_{\mu\nu}^{(\phi)}$ o tensor momento energia do campo escalar canônico dado por (4.8),

$$T_{\mu\nu}^{(\phi)} = \nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\nabla^\rho\phi\nabla_\rho\phi - Vg_{\mu\nu} .$$

Dada métrica (4.17) obtém-se as seguintes equações de Friedmann

$$3H^2 = \mathcal{E}^{(\phi)} , \quad (6.14)$$

$$-2\dot{H} - 3H^2 = p^{(\phi)} . \quad (6.15)$$

A densidade de energia $\mathcal{E}^{(\phi)}$ e a pressão $p^{(\phi)}$ são dadas por

$$\mathcal{E}^{(\phi)} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (6.16)$$

$$p^{(\phi)} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (6.17)$$

A equação diferencial de ϕ , (4.9), assume a forma

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -V'. \quad (6.18)$$

Soluções das Equações de Movimento

Assumindo a equação de estado de fluido barotrópico $p = p(\mathcal{E})$, em particular (2.59), da forma

$$p^{(\phi)} = \omega \mathcal{E}^{(\phi)},$$

com $\omega = \text{constante}$, e considerando a solução (6.6) para o fator de escala $a(t)$, obtém-se os seguintes resultados para $\phi(t)$ e $V(\phi)$

$$\phi(t) = \pm \frac{2}{\sqrt{3(1+\omega)}} \ln t, \quad (6.19)$$

$$V(\phi) = \frac{2(1-\omega)}{3(1+\omega)^2} \exp\left\{\mp \sqrt{3(1+\omega)}\phi\right\}. \quad (6.20)$$

Estas soluções descrevem um universo sempre inflacionário, $\omega < -\frac{1}{3}$, ou sempre não-inflacionário, $\omega > -\frac{1}{3}$. O diagrama do espaço de fase atribuído pelas equações de movimento tem por objetivo explorar todas as riquezas deste sistema, verificando se são possíveis modelos realistas, como descritos anteriormente. Este diagrama será construído dentro da esfera de Poincaré, uma vez que, são especificadas as regiões de positividade do potencial e de regimes inflacionários.

O Diagrama do Espaço de Fase

Primeiramente, precisa-se definir novas variáveis

$$x = \dot{\phi}, \quad (6.21a)$$

$$y = H. \quad (6.21b)$$

Considera-se também que $V(\phi) = V_0 e^{\beta\phi}$, sendo $\beta = \mp \sqrt{3(1+\omega)}$. Manipulando algebricamente as equações de Friedmann, (6.14) e (6.15), e (6.18), tem-se

$$\dot{x} = \frac{\beta}{2}x^2 - 3xy - 3\beta y^2, \quad (6.22)$$

$$\dot{y} = -\frac{1}{2}x^2. \quad (6.23)$$

O potencial $V(\phi)$ está sujeito a seguinte condição de positividade

$$V(\phi) = 3y^2 - \frac{1}{2}x^2 > 0. \quad (6.24)$$

A análise de pontos críticos é realizada a partir de $\dot{x} = 0$ e $\dot{y} = 0$. O único ponto crítico obtido no plano xy é $(x, y) = (0, 0)$. A jacobiana deste ponto é dada por

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.25)$$

que, a partir da equação de autovalor, verifica-se que ela fornece autovalores nulos. Isto significa que este ponto crítico é do tipo degenerado e corresponderá ao espaço de Minkowski.

O próximo passo é obter os raios invariantes deste sistema, que dividirão as regiões de regime inflacionário. Estes raios são caracterizados pela equação $x = \lambda y$. Substituindo-a em (6.22) e (6.23), em seguida subtrair estes resultados, obtém-se a relação

$$(\lambda^2 - 6)(\lambda + \beta) = 0, \quad (6.26)$$

esta equação possui as seguintes raízes

$$\lambda_1 = \pm \sqrt{6}, \quad (6.27a)$$

$$\lambda_2 = -\beta. \quad (6.27b)$$

As equações (6.27a) e (6.27b) indicando que existe três raios invariantes para $\beta \neq \pm \sqrt{6}$. Dois destes raios invariantes são independentes do valor de β , enquanto que o terceiro depende deste valor e, consequentemente, de ω . Este terceiro raio invariante corresponde à primeira equação de Friedmann (6.14).

Identificando os raios $x = -\beta y$, $x = \sqrt{6}y$ e $x = -\sqrt{6}y$, respectivamente como $[XY]$, $[AA']$ e $[CC']$, e inserindo estes valores em (6.23), as equações que descrevem a evolução do sistema ao longo de cada raio poderão ser determinadas. Assim,

$$\dot{y} = -\frac{\beta^2}{2}y^2, \quad (6.28a)$$

$$\dot{y} = -3y^2. \quad (6.28b)$$

A solução referente à (6.28b) será do tipo $a \propto t^{\frac{1}{3}}$, que remete a um regime de campo escalar livre. Neste caso, o parâmetro de equação de estado é dado por $\omega = 1$ (matéria rígida). Nota-se que, dependendo do valor de β , $[XY]$ corresponderá aos raios $[AA']$ e $[CC']$. Já

(6.28a) possui solução da forma $a \propto t^{\frac{2}{3(1+\omega)}}$, com $\omega < -\frac{1}{3}$ para um regime inflacionário, e $\omega < -\frac{1}{3}$ para um regime não inflacionário.

O regime de inflação pode ser identificado fazendo $\ddot{a} > 0$, ou seja, $\dot{H} + H^2 > 0$. Assim, $\dot{y} + y^2 > 0$. Devido a (6.23), isto implica que a região de inflação é descrita por $y^2 - \frac{1}{2}x^2 > 0$. Esta região contém o eixo y .

A análise completa está sujeita à determinar os pontos críticos no infinito. Para isso, o plano (x, y) é projetado na esfera de Poincaré (ver apêndice A), uma vez que, deve-se introduzir novas variáveis, z, u e v , de modo que $x = \frac{u}{z}$ e $y = \frac{v}{z}$. Estas variáveis estão sujeitas a seguinte condição

$$u^2 + v^2 + z^2 = 1. \quad (6.29)$$

Da derivada de (6.29)

$$\dot{z} = \frac{-u\dot{u} - v\dot{v}}{z}, \quad (6.30)$$

e das equações (6.22) e (6.23), tem-se

$$\dot{u} = \frac{\left[\left(\frac{\beta u^2}{2} - 3uv - 3\beta v^2\right)z\right]z - \left(3\beta v^3 + 3uv^2 - \frac{\beta u^2 v}{2} - \frac{u^3}{2}\right)v}{z}, \quad (6.31)$$

$$\dot{v} = \frac{\left(3\beta v^3 + 3uv^2 - \frac{\beta u^2 v}{2} - \frac{u^3}{2}\right)u - \left(\frac{u^2 z}{2}\right)z}{z}. \quad (6.32)$$

A equação para \dot{z} é obtida substituindo (6.31) e (6.32) em (6.30)

$$\dot{z} = \frac{\left(\frac{u^2 z}{2}\right)v - \left(\frac{\beta u^2}{2} - 3uv - 3\beta v\right)u}{z}. \quad (6.33)$$

Chamando $a = \left(\frac{u^2 z}{2}\right)$, $b = z\left(\frac{\beta u^2}{2} - 3uv - 3\beta v^2\right)$ e $c = \left(3\beta v^3 + 3uv^2 - \frac{\beta u^2 v}{2} - \frac{u^3}{2}\right)$, e definindo um novo parâmetro temporal τ a partir de (6.33), o sistema resultante é dado por²

$$u' = bz - cv, \quad (6.34a)$$

$$v' = cu - az, \quad (6.34b)$$

$$z' = av - bu. \quad (6.34c)$$

Os pontos críticos são obtidos no plano $z = 0$ e com $u' = 0$, $v' = 0$ e $z' = 0$. Para que estas

²O método da esfera de Poincaré sempre admite este sistema nesta forma [56].

igualdades sejam satisfeitas tem-se $a = b = c = 0$, resultando

$$-\frac{u^2}{2} + 3v^2 = 0, \quad (6.35a)$$

$$u + \beta v = 0. \quad (6.35b)$$

A equação de vínculo (6.29) fica

$$u^2 + v^2 = 1. \quad (6.36)$$

Relacionando (6.35a) e (6.35b) com (6.36), os pontos críticos no infinito são

$$A(u, v, z) = \left(\sqrt{\frac{6}{7}}, \frac{\sqrt{7}}{7}, 0 \right), \quad A'(u, v, z) = \left(-\sqrt{\frac{6}{7}}, -\frac{\sqrt{7}}{7}, 0 \right), \quad (6.37a)$$

$$C(u, v, z) = \left(\sqrt{\frac{6}{7}}, -\frac{\sqrt{7}}{7}, 0 \right), \quad C'(u, v, z) = \left(-\sqrt{\frac{6}{7}}, \frac{\sqrt{7}}{7}, 0 \right), \quad (6.37b)$$

$$X(u, v, z) = \left(-\frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}}, 0 \right), \quad Y(u, v, z) = \left(\frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}, -\frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}}, 0 \right). \quad (6.37c)$$

A natureza de cada ponto é fornecida através da aplicação das respectivas matrizes jacobianas na equação de autovalor. Os pontos $A(u, v, z)$ e $A'(u, v, z)$ possuem, respectivamente, natureza repulsora e atratora. O ponto $C(u, v, z)$ é do tipo atrator, enquanto que o ponto $C'(u, v, z)$ possui natureza repulsora. A natureza dos pontos $X(u, v, z)$ e $Y(u, v, z)$ dependerá do valor dado a β , ou seja, ao valor atribuído à ω . Estas características podem ser vistas nos diagramas 6.3, 6.2 e 6.4. Os diagramas de fase contêm seis regiões separadas por três raios invariantes, três delas são obtidas inversão temporal, $t \rightarrow -t$. A região que viola a positividade do potencial encontra-se no interior da região dos raios com $\lambda = \pm \sqrt{6}$ ($[AA']$ e $[CC']$). Nesta região a variável x nunca poderá ser nula, uma vez que, neste caso, a variável y torna-se imaginária. Cada diagrama é apresentado para determinado valor atribuído ao parâmetro de equação de estado. Vale mencionar que com mudanças de β , $-\sqrt{6}$ para $\sqrt{6}$, o raio invariante $[XY]$ move-se a partir de $[CC']$ para $[AA']$. Quando $\omega = 1$, $[XY]$ coincide com um dos outros dois. Quando $\omega = -1$, $[XY]$ coincide com o eixo y . As regiões de regime inflacionário são identificadas no diagrama por uma região em azul. Os raios $[AA']$ e $[CC']$, que representam as soluções de campo escalar livre, estão localizados na região não inflacionária.

A figura 6.2 representa o diagrama de fase para o caso de $-\frac{1}{3} < \omega < 1$. Nota-se que o raio invariante $[XY]$ encontra-se no regime não inflacionário. Há dois tipos de trajetórias fisicamente interessantes para este caso. As que ligam o ponto crítico $A(u, v, z)$ à origem, aproximando-se assintoticamente ao raio $[XY]$, começam com um comportamento de campo escalar livre e depois coincidem com as correspondentes soluções de fluido ideal, na região não inflacionária. Existem também curvas que ligam o ponto $C'(u, v, z)$ à origem, começando com um comportamento de campo escalar livre, evoluem para um regime inflacionário e depois coincidem assintoticamente a soluções de fluido ideal não inflacionário.

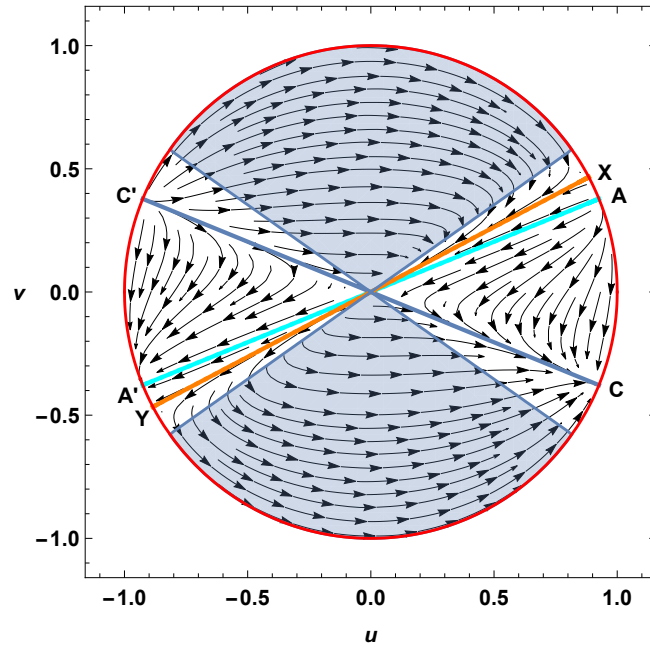


Figura 6.2. Diagrama de espaço de fase para o caso $-\frac{1}{3} < \omega < 1$. Nesta região as soluções do tipo fluido ideal são não inflacionárias.

Em 6.3 verifica-se o diagrama de fase para o caso de $-1 < \omega < -\frac{1}{3}$. Neste diagrama o raio invariante $[XY]$ encontra-se na região inflacionário. Existem curvas que ligam o ponto $A(u, v, z)$ à origem que permanecem sempre no regime não inflacionário, há outras que começam com um comportamento de campo escalar livre e depois tendem assintoticamente à soluções de fluido ideal na região inflacionária. Percebe-se que todas as trajetórias que ligam o ponto $C'(u, v, z)$ à origem possuem um comportamento inicial de campo escalar livre e depois tendem a soluções de fluido ideal no regime inflacionário.

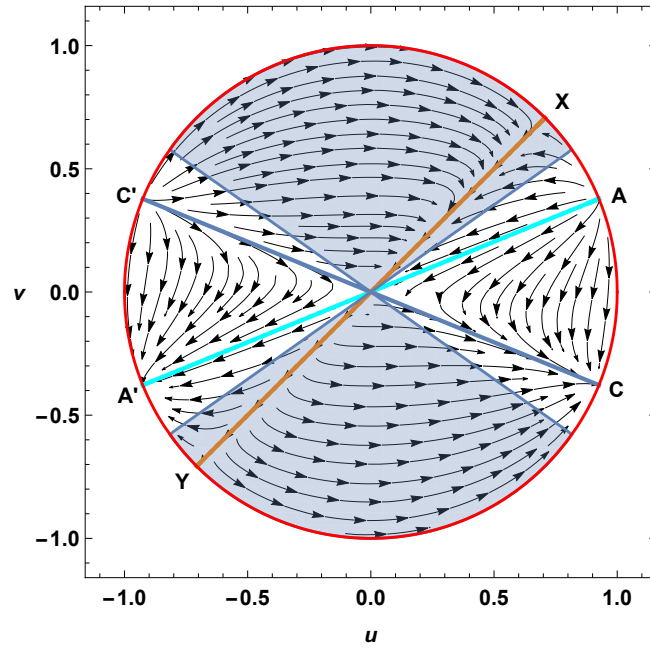


Figura 6.3. Diagrama de espaço de fase para o caso $-1 < \omega < -\frac{1}{3}$. Nesta região as soluções do tipo fluido ideal são inflacionárias.

A figura 6.4 apresenta trajetórias referentes à $\omega = -1$. Verifica-se que todo eixo $u = 0$ torna-se singular e corresponde à solução particular de Sitter com diferentes valores para o parâmetro de Hubble, $H = \frac{\dot{a}}{a}$. Todas as soluções físicas aceitáveis vão ou vem de um ponto deste eixo singular.

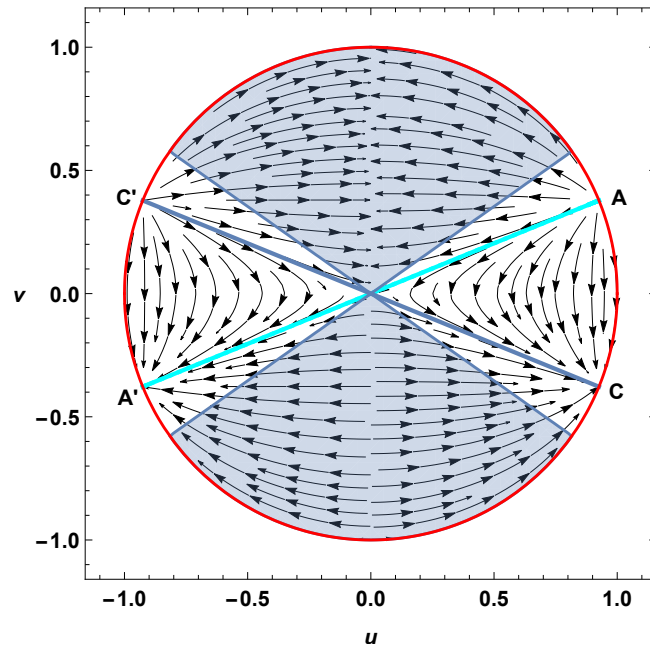


Figura 6.4. Diagrama para $\omega = -1$. O eixo de $u = 0$ torna-se singular e as soluções correspondentes são do tipo de Sitter com diferentes valores do fator de Hubble.

De acordo com cada diagrama de fase nota-se que para qualquer valor fornecido ao parâmetro de equação de estado, ω , o raio invariante $[XY]$, correspondente a primeira equação de Friedmann, é atrator de soluções para H positivo e repulsor para H negativo.

6.3 Modelo Cosmológico com Campo Escalar tipo K-essência

Ação e Equações de Movimento

Agora, analisa-se o caso de acoplamento mínimo entre a gravitação e o campo escalar tipo K-essência, com $f(\phi, X) = \alpha X^n$ e potencial nulo. A densidade de Lagrangiana é

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}R + \alpha X^n .$$

As equações de movimento resultantes são

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} &= \alpha n X^{n-1} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi + \alpha X^n g_{\mu\nu} , \\ \nabla^\alpha (X^{n-1} \nabla_\alpha \phi) &= 0 . \end{aligned}$$

Considerando o espaço-tempo cosmológico dado por (4.17), estas equações de tornam-se

$$3H^2 = \alpha(2n-1) \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} \right)^n , \quad (6.38)$$

$$-2\dot{H} - 3H^2 = \alpha \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} \right)^n , \quad (6.39)$$

$$(2n-1)\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = 0 . \quad (6.40)$$

com densidade de energia e pressão dadas por

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{(K)} &= \alpha(2n-1) \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} \right)^n , \\ p^{(K)} &= \alpha \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} \right)^n . \end{aligned}$$

Soluções das Equações de Movimento

Como comentado anteriormente, as equações de $\mathcal{E}^{(K)}$ e $p^{(K)}$ mostram que este modelo possui equação de estado de fluido barotrópico

$$p^{(K)} = \omega \mathcal{E}^{(K)} .$$

A relação entre o parâmetro de equação de estado e n é dada por (5.21)

$$\omega = \frac{1}{2n-1} .$$

A menos que $n \neq 1$, as soluções obtidas para estas equações são

$$a(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2n-1}{6}} \left(\frac{3\alpha n^2}{2n-1}\right)^{\frac{2n-1}{6n}} t^{\frac{2n-1}{3n}}, \quad (6.41)$$

$$\phi(t) = \frac{\sqrt{2}n}{n-1} \left(\frac{3\alpha n^2}{2n-1}\right)^{\frac{1}{2n}} t^{\frac{n-1}{n}}. \quad (6.42)$$

O Diagrama do Espaço de Fase

A análise no espaço de fase é feita usando $n = 2$, que corresponde a $\omega = \frac{1}{3}$. Para demais valores de n , a análise não é apresentada explicitamente, mas segue de forma análoga. As coordenadas do espaço de fase adotadas são

$$x = \dot{\phi}^2, \quad (6.43a)$$

$$y = H. \quad (6.43b)$$

O sistema dinâmico é encontrado a partir das equações (6.39) e (6.40), resultando

$$\dot{x} = -2xy, \quad (6.44)$$

$$\dot{y} = -\frac{x^2}{8} - \frac{3y^2}{2}, \quad (6.45)$$

sujeitas a equação de vínculo

$$y = \pm \frac{x}{2}. \quad (6.46)$$

Esta é a primeira equação de Friedmann (6.38). O único ponto crítico no plano xy é $(x, y) = (0, 0)$. Sua jacobiana possui termos nulos. Ao aplicá-la na equação de autovalor verifica-se que este ponto é degenerado e corresponde ao espaço de Minkowski.

Os raios invariantes são obtidos ao substituir $x = \lambda y$ em (6.44) e (6.45). Subtraindo os resultados fornecerá $\lambda = \pm 2$, isto corresponderá à primeira equação de Friedmann (6.46). Este vínculo representa os únicos raios invariantes do diagrama.

Já se sabe que o regime de inflação é determinado pela inequação $\dot{y} + y^2 > 0$. Desta maneira, da equação (6.45) tem-se que $4y^2 + x^2 < 0$. No entanto, diagrama de fase para o caso de $\omega = \frac{1}{3}$ não fornecerá uma região de regime inflacionário.

Novamente, utiliza-se o método da esfera de Poincaré para obter os pontos críticos no infinito. Admite-se a transformação $x = \frac{u}{z}$ e $y = \frac{v}{z}$. As variáveis da esfera estão sujeitas à equação de vínculo $u^2 + v^2 + z^2 = 1$. Da derivada desta equação de vínculo e de (6.44) e (6.45), encontra-se

$$u' = bz - cv, \quad (6.47a)$$

$$v' = cu - az, \quad (6.47b)$$

$$z' = av - bu. \quad (6.47c)$$

Sendo $a = \frac{z}{8}u^2 + \frac{3}{2}zv^2$, $b = -2uvz$ e $c = -\frac{u^3}{8} + \frac{uv^2}{2}$. A derivada é dada em relação ao parâmetro temporal τ . A equação de vínculo (6.46) fica

$$v = \pm \frac{u}{2}. \quad (6.48)$$

Os pontos no infinito são obtidos no plano $z = 0$ e com $u' = 0$, $v' = 0$ e $z' = 0$. Estas igualdades são satisfeitas quando $a = b = c = 0$, assim

$$u = \pm 2v. \quad (6.49)$$

De (6.49) juntamente com $u^2 + v^2 = 1$, obtém-se os seguintes pontos críticos

$$B(u, v, z) = \left(2\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}, 0\right), \quad B'(u, v, z) = \left(-2\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5}, 0\right), \quad (6.50a)$$

$$D(u, v, z) = \left(2\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5}, 0\right), \quad D'(u, v, z) = \left(-2\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}, 0\right). \quad (6.50b)$$

A natureza de cada ponto é fornecida através da aplicação das respectivas matrizes jacobianas na equação de autovalor. Os pontos B e B' possuem, respectivamente, natureza repulsora e atratora. O ponto D é do tipo atrator, enquanto que o ponto D' possui natureza repulsora. Estas características são verificadas no diagrama 6.5.

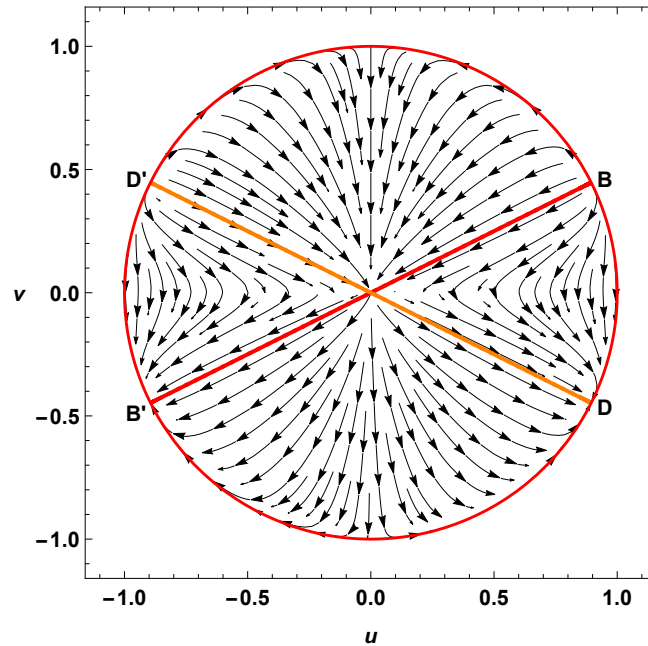


Figura 6.5. Diagrama de fase para $n = 2$ ($\omega = \frac{1}{3}$). As funções em laranja e vermelho representam equação de vínculo (6.46).

A figura 6.6 mostra o diagrama de fase do modelo de fluido ideal para o caso de $\omega = \frac{1}{3}$.³ Nota-se que as trajetórias do diagrama de fase do modelo de K-essência proposto

³Diferente do caso estudado anteriormente (radiação, matéria e constante cosmológica) este diagrama é

assemelham-se aos de fluido ideal. Nos dois gráficos existem curvas que satisfazem a equação de vínculo (primeira equação de Friedmann) durante todo o tempo. No diagrama de K-essência há pontos críticos pertencentes a equação de vínculo que atraem e originam soluções em u negativo, diferente do diagrama de fluido que possui suas funções somente em u positivo. No entanto, pode-se contornar esta situação por simples troca de coordenadas do espaço de fase do modelo, isto é, trocar $u \propto \dot{\phi}^2$ por $u \propto \dot{\phi}^4$. Desta maneira, utiliza-se como coordenada do diagrama a densidade de energia de K-essência, ou seja, o mesmo tipo de coordenada utilizada no diagrama de fluido.

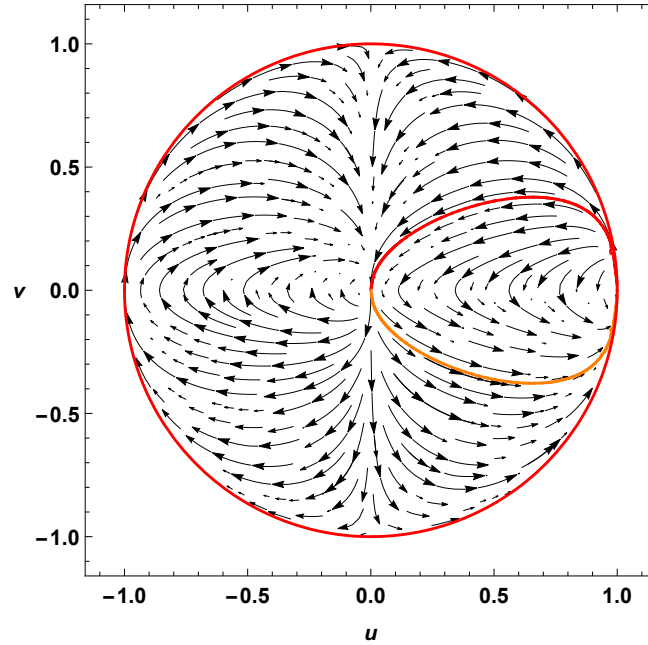


Figura 6.6. Diagrama de um fluido ideal com $\omega = \frac{1}{3}$. As funções em vermelho e laranja representam a equação de vínculo do sistema, primeira equação de Friedmann.

obtido somente para o caso de radiação, além disso, sua projeção é feita na esfera de Poincaré. O procedimento para obter esta esfera é semelhante ao usado nos outros modelos. Neste caso, as variáveis admitidas são $x = \mathcal{E}$ e $y = H$.

Capítulo 7

Conclusão

Modelos de fluidos ideais são comumente utilizados para descrever o conteúdo material do universo. Neste sentido, é importante compreender a dinâmica que rege este fluido. Neste trabalho foi feita uma revisão sobre a hidrodinâmica de fluidos, especificamente, fluidos ideais. Foram obtidas as equações que fornecem o estado de movimento do fluido, no regime de baixas e altas velocidades, sem e com interação gravitacional. Verificou-se que, com condições necessárias, os modelos de campos escalar canônico e de K-essência, minimamente acoplado, mimetizam o fluido ideal. Utilizou-se técnicas de sistemas dinâmicos para analisar qualitativamente estes comportamentos de campo escalar como fluido ideal.

No segundo capítulo mostrou-se os aspectos gerais do movimento do fluido. Foi obtido, em regime não relativístico, a equação que determina a conservação de massa no interior do volume do sistema, assim como a equação que mostra o comportamento dinâmico neste volume, equação de Euler. Verificou-se que a forma mais simples de descrever o movimento adiabático do fluido ideal é através do movimento isentrópico (a entropia é constante em todo o volume do fluido). Analisou-se também a condição de equilíbrio gravitacional que o fluido se encontra. Estas equações do estado de movimento do fluido foram obtidas no regime relativístico, com e sem interação gravitacional. Ainda, foi obtida a expressão referente a velocidade de propagação da onda no fluido. Por fim, determinou-se a equação de estado correspondem ao fluido do tipo barotrópico.

No capítulo 3 mostrou-se que o princípio variacional referente ao modelo de fluido ideal pode ser generalizado de forma a incluir as equações de movimento referente a este fluido. A densidade de Lagrangiana geral foi obtida introduzindo duas novas equações de vínculo, satisfeitas pelas do fluido. Essas equações são a conservação da identidade de partícula e a conservação de entropia por unidade de partícula. A introdução da primeira equação faz com que o modelo descreva movimento irrotacional como rotacional. A segunda equação elimina a exigência de movimentos isentrópicos. Verificou-se que são obtidas as mesmas equações de movimento do fluido para o caso de uma ação generalizada.

A correspondência entre um campo escalar canônico minimamente acoplado, mais potencial, e um fluido ideal foi obtida no quarto capítulo. Verificou-se que a densidade de

Lagrangiana de um fluido eficaz de campo escalar canônico mimetiza, através de determinadas condições, um fluido ideal. Mostrou-se que ao admitir o caso de isentropia ao modelo de campo escalar canônico é possível obter a velocidade de perturbação no fluido eficaz, que assume valor igual a velocidade da luz. Ao final, definiu-se outros tipos de campos que possuem natureza diferente do campo usual, além de ter sido feita uma análise da dinâmica de campo fantasma num espaço-tempo cosmológico, mostrando que este campo viola a condição de positividade de densidade de energia do modelo, admitindo também que o parâmetro da equação de estado assuma valor de $\omega < -1$.

No capítulo 5 foi feita a correspondência entre um campo escalar tipo K-essência minimamente acoplado e um fluido ideal. Neste caso, verificou-se também que a densidade de Lagrangiana, inicialmente com $f(\phi, X)$ arbitrária, de um fluido eficaz deste modelo de campo mimetiza, através de determinadas condições, um fluido ideal. Novamente, admitindo o caso de isentropia é possível obter uma equação que descreve a velocidade de perturbação no fluido eficaz de K-essência. Em seguida, considerou-se um caso particular para função $f(\phi, X)$, representado pelo monômio X^n . Admitindo isentropia, a velocidade de perturbação obtida é dada por $v_{pert} \leq c$ (região de $n > 1$), este resultado difere do resultado correspondente ao fluido efetivo de campo escalar canônico, pois neste caso a velocidade v_{pert} é igual a velocidade da luz. Para o caso de potencial nulo nota-se uma relação direta entre o parâmetro de equação de estado do fluido barotrópico e n . Nesse caso, e considerando o espaço-tempo cosmológico, foi verificado que este modelo de campo escalar tipo K-essência viola a condição de positividade de energia na região de $\omega < -1$ ($0 < n < \frac{1}{2}$), correspondente a assinatura de fluido fantasma. Na última seção do capítulo 5 foi utilizado o método de sistemas dinâmicos para analisar os modelos de fluido, campo canônico mais potencial e campo tipo K-essência com potencial nulo. Restringiu-se o modelo de fluido para o caso de radiação, matéria tipo poeira e constante cosmológica. Observou-se que o universo com radiação originava soluções, o de poeira atua como um ponto de sela (atraia e repelia soluções) e o com constante cosmológica atrai todas as soluções do modelo. O diagrama fase do modelo de campo escalar canônico mais potencial foi construído a partir do método da esfera de Poincaré. Notou-se que este diagrama apresenta riqueza em detalhes pra descrever o diferentes comportamentos das soluções tipo fluido ideal nos regimes inflacionário e não inflacionário. Foram obtidos diagramas de espaço de fase para o modelo de K-essência utilizando o método da esfera de Poincaré. Admitiu-se para análise somente o valor de $\omega = \frac{1}{3}$ (radiação) e observou-se que o modelo de K-essência reproduz semelhantemente um fluido ideal.

O método de sistemas dinâmicos constitui uma relevante ferramenta para desvendar aspectos das soluções de uma teoria, ainda que as soluções explícitas da mesma não sejam conhecidas. Assim, ela é em princípio de grande valor para explorar teorias (ou setores delas) cuja dinâmica cosmológica de fundo é significantemente complexa, como em particular é o caso da ação de Horndeski [57, 58], de gravitação massiva e bigravidade [59, 60] e de RGGR ("Renormalization Group extended General Relativity") [61, 62]. As duas primeiras têm atraído significativo interesse atualmente, a primeira por ser o caso mais geral de uma

teoria escalar tensorial cujas equações de campo são no máximo da segunda ordem. E a segunda por ser uma (tentativa) teoria de descrever duas partículas de spin dois que interagem diretamente, e isto é não trivial, devido a vínculos teóricos que impossibilitam diversos tipos de acoplamentos. Por fim, a terceira é uma proposta mais recente, motivada por aspectos de teoria de campos em espaços curvos e algumas abordagens de gravitação quântica ("asymptotic safety" em particular [63]), e que pode ser descrita por um campo tensorial (uma métrica) e um ou mais campos escalares, mas não faz parte das teorias escalares-tensoriais usuais, como explicado em [62]. Por fim, cabe ressaltar que essas três abordagens de extensões de relatividade geral podem em princípio terem impacto em diversos contextos cosmológicos, com ênfase para o setor cosmológico que não é diretamente observado: energia escura, matéria escura e inflação.

Apêndice A

Método da Esfera de Poincaré

O método da esfera de Poincaré é uma ferramenta muito eficaz para obter pontos críticos localizados no infinito em diagramas de espaço fase do sistema físico estudado. Neste apêndice é feito apenas um esboço deste método, para estudá-lo sistematicamente ver [56]. Assim, considera-se o sistema

$$\dot{x} = X(x, y) \text{ e } \dot{y} = Y(x, y), \quad (\text{A.1})$$

que representa os sistemas dinâmicos do capítulo 6. O segundo membro desta equação são polinômios, a coeficiente real. Considera-se também um sistema do eixo cartesiano ortogonal uvw e o plano xy em $z = 1$. Os planos u, v e xy possuem o mesmo eixo, de modo que, a origem de xy está localizada em $u = 0, v = 0$ e $z = 1$. Admite-se também uma superfície esférica de Σ do espaço uvw com centro na origem $O = (0, 0, 0)$ e raio unitário. Esta esfera admite a equação (6.29)

$$u^2 + v^2 + z^2 = 1.$$

O equador da esfera situa-se no plano $z = 0$ que divide a superfície em dois hemisférios, Σ_1 e Σ_2 , cujos pontos são caracterizados, respectivamente, por $z \geq 0$ e $z \leq 0$.

Seja $P = (x, y, 1)$ um ponto do plano xy e $P_1 = (u_1, v_1, z_1)$, $P_2 = (u_2, v_2, z_2)$ pontos da reta OP que cortam, respectivamente, Σ_1 e Σ_2 . As coordenadas se relacionam na forma $\frac{u_i}{x} = \frac{v_i}{y} = \frac{z_i}{1} = z_i$ ($i = 1, 2$), e $u_i^2 + v_i^2 + z_i^2 = 1$. Agora, ao definir $R = (x^2 + y^2 + 1)^{1/2}$, com $R > 0$, resultará em $u_1 = \frac{x}{R}$, $v_1 = \frac{y}{R}$, $z_1 = \frac{1}{R}$, $u_2 = -\frac{x}{R}$, $v_2 = -\frac{y}{R}$, $z_2 = -\frac{1}{R}$ e $x = \frac{u_i}{z_i}$, $y = \frac{v_i}{z_i}$ ($i = 1, 2$). É dito que os pontos P_1 e P_2 são a imagem do ponto P , respectivamente, em Σ_1 e Σ_2 . Desta maneira,

$$x = \frac{u}{z}, \quad y = \frac{v}{z} \text{ e } u^2 + v^2 + z^2 = 1. \quad (\text{A.2})$$

Com esta representação uma curva γ do plano xy tem por imagem duas curvas, γ_1 e γ_2 , simétricas em relação ao centro de Σ . Os pontos no infinito no plano xy tem sua imagem na

linha do equador da superfície esférica Σ .

Agora, supõem-se que o sistema (A.1) os termos $X(x, y)$ e $Y(x, y)$ são polinômios de graus p e q respectivamente, com um número real n maior entre p e q . Estes polinômios possuem coeficientes reais, sem divisores reais comuns. Desta forma, de (A.2), obtém-se

$$X\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = \frac{P(u, v, z)}{z^p} \quad \text{e} \quad Y\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = \frac{Q(u, v, z)}{z^q}. \quad (\text{A.3})$$

Os polinômios P e Q são homogêneos nas variáveis u, v e z , e possuem graus p e q , respectivamente. Desta forma, dada equação (A.1) tem-se $-Y(x, y)dx + X(x, y)dy = 0$. E de (A.2) $dx = (z du - u dz)z^{-2}$ e $dy = (z dv - v dz)z^{-3}$. Assim, tendo em conta (A.3), obtém-se

$$-z^{n-p+1}Q(u, v, z)du + z^{n-q+1}P(u, v, z)dv + [uz^{n-p}Q(u, v, z) - vz^{n-q}P(u, v, z)]dz = 0. \quad (\text{A.4})$$

A partir daqui coloca-se:

1. Para $p < q = n$

$$a = -z^{q-p+1}Q(u, v, z), \quad b = z P(u, v, z) \quad \text{e} \quad c = u z^{q-p}Q(u, v, z) - v P(u, v, z).$$

2. Para $q < p = n$

$$a = -z Q(u, v, z), \quad b = z^{p-q+1}P(u, v, z) \quad \text{e} \quad c = u Q(u, v, z) - v z^{p-q}P(u, v, z).$$

3. Para $p = q = n$ e $u Q(u, v, z) - v P(u, v, z)$ não divisível por z

$$a = -z Q(u, v, z), \quad b = z P(u, v, z) \quad \text{e} \quad c = u Q(u, v, z) - v P(u, v, z).$$

4. Para $p = q = n$ e $u Q(u, v, z) - v P(u, v, z)$ divisível por z

$$a = -Q(u, v, z), \quad b = P(u, v, z) \quad \text{e} \quad c = z^{-1} [u Q(u, v, z) - v P(u, v, z)].$$

À equação (A.4) deve-se associar

$$u du + v dv + z dz = 0. \quad (\text{A.5})$$

O sistema constituído de (A.4) e (A.5) admite a solução $z = 0$. Nos casos 1., 2. e 3. a equação

$$a du + b dv + c dz = 0 \quad (\text{A.6})$$

coincide com (A.4), enquanto que no caso 4. deve-se multiplicar por z para ter esta coincidência.

Desta maneira, das equações (A.5) e (A.6) é obtido o seguinte sistema

$$du : dv : dz = \begin{vmatrix} b & c \\ v & z \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c & a \\ z & u \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a & b \\ u & v \end{vmatrix} \quad (\text{A.7})$$

que, introduzindo um parâmetro τ , obtém-se o sistema (6.34)

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\tau} &= bz - cv , \\ \frac{dv}{d\tau} &= cu - az , \\ \frac{dz}{d\tau} &= av - bu . \end{aligned}$$

Os coeficientes a , b e c dos modelos cosmológicos de campo escalar minimamente acoplado mais potencial e o de campo escalar tipo K-essência são obtidos a partir do item 3.

Referências Bibliográficas

- [1] Scott Dodelson. *Modern cosmology*. Academic press, 2003.
- [2] Viatcheslav Mukhanov. *Physical Foundations of Cosmology*. Cambridge university press, 2005.
- [3] Steven Weinberg. *Cosmology*. Oxford Univ. Press, 2008.
- [4] Alan H. Guth. The Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems. *Phys. Rev.*, D23:347–356, 1981.
- [5] Edmund J. Copeland, M. Sami, and Shinji Tsujikawa. Dynamics of Dark Energy. *Int. J. Mod. Phys.*, D15:1753–1936, 2006.
- [6] L. D. Landau and Lifshitz. *Fluid Mechanics*, volume 6. 1959.
- [7] Luciano Rezzolla and Olindo Zanotti. *Relativistic Hydrodynamics*. Oxford University Press, 2013.
- [8] Adam G. Riess, Alexei V. Filippenko, Peter Challis, Alejandro Clocchiatti, Alan Diercks, Peter M. Garnavich, Ron L. Gilliland, Craig J. Hogan, Saurabh Jha, Robert P. Kirshner, et al. Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant. *The Astronomical Journal*, 116(3):1009, 1998.
- [9] Adam G. Riess, Louis-Gregory Strolger, John Tonry, Stefano Casertano, Henry C Ferguson, Bahram Mobasher, Peter Challis, Alexei V. Filippenko, Saurabh Jha, Weidong Li, et al. Type Ia Supernova Discoveries at $z > 1$ from the Hubble Space Telescope: Evidence for past Deceleration and Constraints on Dark Energy Evolution. *The Astrophysical Journal*, 607(2):665, 2004.
- [10] John L. Tonry, Brian P. Schmidt, Brian Barris, Pablo Candia, Peter Challis, Alejandro Clocchiatti, Alison L. Coil, Alexei V. Filippenko, Peter Garnavich, Craig Hogan, et al. Cosmological Results from High- z Supernovae. *The Astrophysical Journal*, 594(1):1, 2003.
- [11] Pierre Astier et al. The Supernova Legacy Survey: Measurement of $\Omega(m)$, $\Omega(\Lambda)$ and W from the First Year Data Set. *Astron. Astrophys.*, 447:31–48, 2006.

- [12] Steven Weinberg and R. H. Dicke. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, volume 41. American Association of Physics Teachers, 1973.
- [13] Robert M. Wald. *General Relativity*. University of Chicago press, 2010.
- [14] Stephen W. Hawking and George Francis Rayner Ellis. *The Large Scale Structure of Space-Time*, volume 1. Cambridge university press, 1973.
- [15] Crislane de Souza Santos. Condições de Energia de Hawking e Ellis e a Equação de Raychaudhuri. Master's thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2011.
- [16] Deborah Faragó Jardim. *Análise Perturbativa em Modelos Cosmológicos Fantasma*. PhD thesis, Universidade Federal do Espírito Santo, 2009.
- [17] Robert R. Caldwell. A Phantom Menace? Cosmological Consequences of a Dark Energy Component with Super-Negative Equation of State. *Physics Letters B*, 545(1):23–29, 2002.
- [18] Robert R. Caldwell and Marc Kamionkowski. The Physics of Cosmic Acceleration. *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, 59:397–429, 2009.
- [19] Sean M. Carroll, Mark Hoffman, and Mark Trodden. Can the Dark Energy Equation of State Parameter be Less Than -1? *Phys. Rev.*, D68:023509, 2003.
- [20] Emmanuel N. Saridakis. Theoretical Limits on the Equation of State Parameter of Phantom Cosmology. *Phys. Lett.*, B676:7–11, 2009.
- [21] Valerio Faraoni. The Correspondence Between a Scalar Field and an Effective Perfect Fluid. *Phys. Rev.*, D85:024040, 2012.
- [22] Frederico Arroja and Misao Sasaki. Note on the Equivalence of a Barotropic Perfect Fluid with a k-essence Scalar Field. *Physical Review D*, 81(10):107301, 2010.
- [23] Steven Weinberg. *The Quantum Theory of Fields*, volume 2. Cambridge university press, 1996.
- [24] John Wainwright and George Francis Rayner Ellis. *Dynamical Systems in Cosmology*. Cambridge University Press, 2005.
- [25] Alan A. Coley. *Dynamical Systems and Cosmology*, volume 291. Springer Science & Business Media, 2013.
- [26] Christian G. Boehmer and Nyein Chan. *Dynamical Systems in Cosmology*. 2014.
- [27] John R. Ray. A Note on the Lagrangian Density for Fluid Systems in General Relativity. *Acta Physica Polonica*, 30:481–484, 1966.
- [28] Mark S. Madsen. A Note on the Equation of State of a Scalar Field. *Astrophysics and space science*, 113(1):205–207, 1985.

- [29] Mark S Madsen. Scalar Fields in Curved Space-Times. *Classical and quantum gravity*, 5(4):627, 1988.
- [30] Giulia Cusin, Filipe de O. Salles, and Ilya L. Shapiro. Tensor Instabilities at the end of the LCDM Universe. *Phys. Rev.*, D93(4):044039, 2016.
- [31] C. Armendariz-Picon. k-inflation. In *6th SFB-375 Ringberg Workshop: Astroteilchenphysik Ringberg Castle, Tegernsee, Germany, October 11-15, 1999*, pages 65–68, 1999.
- [32] Roland de Putter and Eric V. Linder. Kinetic k-essence and Quintessence. *Astropart. Phys.*, 28:263–272, 2007.
- [33] C. Armendariz-Picon, Viatcheslav F. Mukhanov, and Paul J. Steinhardt. Essentials of k-essence. *Phys. Rev.*, D63:103510, 2001.
- [34] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, and Linda E. Reichl. *Statistical physics, part 1*, volume 34. 1981.
- [35] J. W. van Holten. Relativistic Fluid Dynamics. 2006.
- [36] John R. Ray. Lagrangian Density for Perfect Fluids in General Relativity. *Journal of Mathematical Physics*, 13(10):1451–1453, 1972.
- [37] Bernard F. Schutz. Perfect Fluids in General Relativity: Velocity Potentials and a Variational Principle. *Phys. Rev.*, D2:2762–2773, 1970.
- [38] Olivier Minazzoli and Tiberiu Harko. New derivation of the Lagrangian of a Perfect Fluid with a Barotropic Equation of State. *Phys. Rev.*, D86:087502, 2012.
- [39] Robert L Seliger and G. B. Whitham. Variational Principles in Continuum Mechanics. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 305, pages 1–25. The Royal Society, 1968.
- [40] J. David Brown. Action Functionals for Relativistic Perfect Fluids. *Class. Quant. Grav.*, 10:1579–1606, 1993.
- [41] J. L. Synge, editor. *Relativity: The General Theory*. 1960.
- [42] Alexei A. Starobinsky. Dynamics of Phase Transition in the New Inflationary Universe Scenario and Generation of Perturbations. *Phys. Lett.*, B117:175–178, 1982.
- [43] Ivaylo Zlatev, Li-Min Wang, and Paul J. Steinhardt. Quintessence, Cosmic Coincidence, and the Cosmological Constant. *Phys. Rev. Lett.*, 82:896–899, 1999.
- [44] T. Padmanabhan. Cosmological constant: The Weight of the vacuum. *Phys. Rept.*, 380:235–320, 2003.
- [45] Oliver F Piattella, Júlio C Fabris, and Neven Bilić. Note on the Thermodynamics and the Speed of Sound of a Scalar Field. *arXiv preprint arXiv:1309.4282*, 2013.

- [46] Eva Silverstein and David Tong. Scalar Speed Limits and Cosmology: Acceleration from D-cceleration. *Phys. Rev.*, D70:103505, 2004.
- [47] Xingang Chen. Multi-throat Brane Inflation. *Phys. Rev.*, D71:063506, 2005.
- [48] Xingang Chen. Inflation from Warped Space. *JHEP*, 08:045, 2005.
- [49] David Seery and James E. Lidsey. Primordial non-Gaussianities in Single Field Inflation. *JCAP*, 0506:003, 2005.
- [50] Frederico Arroja and Kazuya Koyama. Non-gaussianity from the Trispectrum in General Single Field Inflation. *Phys. Rev.*, D77:083517, 2008.
- [51] David Langlois and Sebastien Renaux-Petel. Perturbations in Generalized Multi-Field Inflation. *JCAP*, 0804:017, 2008.
- [52] David Langlois, Sebastien Renaux-Petel, Daniele A. Steer, and Takahiro Tanaka. Primordial Fluctuations and Non-Gaussianities in Multi-Field DBI Inflation. *Phys. Rev. Lett.*, 101:061301, 2008.
- [53] C. Armendariz-Picon and Eugene A. Lim. Haloes of k-essence. *JCAP*, 0508:007, 2005.
- [54] Michael Malquarti, Edmund J. Copeland, Andrew R. Liddle, and Mark Trodden. A New View of k-essence. *Physical Review D*, 67(12):123503, 2003.
- [55] A. B. Batista, J. C. Fabris, S. V. B. Goncalves, and J. Tossa. Qualitative Analysis of a Scalar-Tensor Theory with Exponential Potential. *International Journal of Modern Physics A*, 16(28):4527–4541, 2001.
- [56] Giovanni Sansone and Roberto Conti. *Equazioni Differenziali non Lineari*. Edizioni Cremonese, P. Noordhoff Ltd., 1957.
- [57] Gregory Walter Horndeski. Second-Order Scalar-Tensor Field Equations in a Four-Dimensional Space. *Int.J.Theor.Phys.*, 10:363–384, 1974.
- [58] Cédric Deffayet and Danièle A. Steer. A Formal Introduction to Horndeski and Galileon theories and their Generalizations. *Class. Quant. Grav.*, 30:214006, 2013.
- [59] Thibault Damour and Ian I. Kogan. Effective Lagrangians and Universality Classes of Nonlinear Bigravity. *Phys. Rev.*, D66, 2002.
- [60] Mikhail S. Volkov. Cosmological Solutions with Massive Gravitons in the Bigravity Theory. *JHEP*, 01:035, 2012.
- [61] Davi C. Rodrigues, Patricio S. Letelier, and Ilya L. Shapiro. Galaxy Rotation Curves from General Relativity with Renormalization Group corrections. *JCAP*, 1004:020, 2010.

- [62] Davi C. Rodrigues, Bertrand Chauvineau, and Oliver F. Piattella. Scalar-Tensor Gravity with System-Dependent Potential and its Relation with Renormalization Group Extended General Relativity. *JCAP*, 1509(09):009, 2015.
- [63] Max Niedermaier and Martin Reuter. The Asymptotic Safety Scenario in Quantum Gravity. *Living Rev. Rel.*, 9:5–173, 2006.